Sphärizitätseffekte
in NLTE-Sternatmosphärenmodellen

Diplomarbeit

von

Thorsten Nagel

Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Institut für Astronomie und Astrophysik
Abteilung Astronomie

Februar 2000

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Teil I

Einleitung

Kapitel 1

Motivation

1.1 Am Anfang war das Licht ...

Blickt man in einer klaren, mondlosen Nacht, fernab der Zivilisation, hinauf zum Himmel, so funkeln einem scheinbar Myriaden kleiner Lichtpunkte entgegen. Dieser Anblick fasziniert den Menschen seit vielen Jahrtausenden, weshalb es nicht verwundert, daß die Astronomie die älteste Wissenschaft ist. Bis in die heutige Zeit hat sich nichts daran geändert, daß das Licht der Sterne die wichtigste und, abgesehen von Neutrinos und der geplanten Beobachtung von Gravitationswellen, einzige Quelle ist, um unser Verständnis des Universums zu vergrößern.

Aus dem Sternenlicht beziehungsweise seinem Spektrum lassen sich nicht nur die chemische Zusammensetzung, sondern z.B. auch Masse, Größe und Alter der Sterne und Galaxien bestimmen, um so unsere Vorstellungen von der Entwicklung des Universums zu überprüfen. Hierzu wird ein Stern beziehungsweise eine Sternatmosphäre unter Annahme einer bestimmten Effektivtemperatur T_{eff}, Oberflächenschwerebeschleunigung g und chemischen Zusammensetzung im Computer modelliert und das daraus gewonnene synthetische Spektrum mit einem beobachteten verglichen. Durch Variation der Eingabeparameter versucht man nun, das beobachtete Spektrum möglichst perfekt nachzubilden und so die physikalischen Größen der Photosphäre des Sterns zu bestimmen.

Inzwischen haben Atmosphärenmodelle ein hohes Maß an Realitätsnähe. Allerdings beschränkt man sich häufig auf kompakte Atmosphären, deren Dicke klein gegenüber dem Sternradius ist, so daß man die Schichtung planparallel nähern und die Schwerebeschleunigung in ihr als konstant annehmen kann. Bei Sternen mit ausgedehnten Atmosphären ist diese Näherung jedoch nicht ausreichend.

1.2 Ziel der Diplomarbeit

In dieser Arbeit gehe ich der Frage nach, inwiefern Sphärizitätseffekte aufgrund der Krümmung der Atmosphäre eine Rolle bei der Berechnung von Atmosphärenmodellen spielen. Dazu ist es zunächst erforderlich, den bestehenden Programmcode, der auf planparalleler Geometrie beruht, auf sphärische Atmosphärengeometrie zu erweitern. Hierzu sind im wesentlichen Eingriffe in die Gleichungen für das radiative und hydrostatische Gleichgewicht sowie in die Strahlungstransportgleichung nötig, wobei der Umformulierung des Strahlungstransportes das Hauptgewicht zufällt. Mit dem neuen Programmcode wird dann ein Modellgitter entlang des Entwicklungsweges eines Zentralstern eines Planetarischen Nebels (CSPN) sowohl in planparalleler Näherung als auch in sphärischer Geometrie berechnet, um herauszufinden, wie groß der systematische Fehler bei einer Bestimmung von T_{eff} und g mit planparallelen Modellen ist. Desweiteren werden Modelle für konkrete Einzelobjekte in beiden

Geometrien berechnet, in der Hoffnung, bisher ungeklärte Abweichungen der Modellspektren von den Beobachtungen als Sphärizitätseffekte erklären zu können. Im Vordergrund steht hierbei das nach wie vor nicht vollständig gelöste Balmerlinien-Problem.

Beim Vergleich synthetischer mit beobachteten Spektren spielen die Balmerlinien des Wasserstoffs ein wichtige Rolle. Es hat sich gezeigt (Napiwotzki & Rauch, 1994), daß es bei heißen DAO[1] Sternen mit Effektivtemperaturen über 70 000 K nicht gelingt, einen konsistenten Fit der Wasserstoff-Balmerlinien zu erreichen. Die Effektivtemperaturen, die sich aus den einzelnen Linien ergeben, unterscheiden sich drastisch um bis zu einem Faktor 2. Werner (1996) gelang es zwar zu zeigen, daß bei nicht zu heißen sdO-Sternen[2] Kühlung durch CNO-Elemente den Effekt erklären kann, bei sehr heißen Sternen wie z.B. dem Zentralstern des Planetarischen Nebels NGC 7293 reicht die Kühlung durch die CNO-Elemente jedoch nicht aus. Ein Ziel dieser Arbeit ist deshalb die Untersuchung, ob Sphärizitätseffekte in Kombination mit der Kühlung durch CNO-Elemente das Balmerlinien-Problem befriedigend lösen können.

[1]Spektralklassifikation, wasserstoffreicher weißer Zwerg mit Spuren von Helium
[2]Spektralklassifikation, heißer Unterzwerg vom Spektraltyp O

Kapitel 2

Was bisher geschah ...

In den letzten Jahren wurden auf dem Gebiet der Modellierung von Sternatmosphären erhebliche Fortschritte erzielt. In diesem Abschnitt sollen kurz die wichtigsten Ergebnisse der Arbeiten verschiedener Arbeitsgruppen auf diesem Gebiet dargestellt werden.

2.1 Vom LTE zum NLTE

Sterne sind keine unveränderlichen Objekte. Sie strahlen Energie ab und befinden sich deshalb nicht im thermodynamischen Gleichgewicht (TE). Man kann jedoch das Konzept des lokalen thermodynamischen Gleichgewichts (LTE) einführen, indem man die Annahme macht, daß die atomaren Besetzungszahlen n_i, und damit der Absorptionskoeffizient κ und der Emissionskoeffizient η, gleich ihren Werten des thermodynamischen Gleichgewichts entsprechend der lokalen Temperatur sind. Lediglich das Strahlungsfeld darf von seinem TE-Wert abweichen. Diese Idee wurde bereits in den vierziger und fünfziger Jahren unter anderem von Unsöld (1955) angewandt. Durch das LTE ergeben sich numerische Vereinfachungen, allerdings kann es auch zu falschen Ergebnissen führen. Bei heißen Sternen verliert das Konzept des LTE seine Gültigkeit, ihre Atmosphären befinden sich im sogenannten Non-LTE (NLTE). Die hohen Temperaturen und geringen Dichten heißer Sterne führen zu kleinen Stoßraten c_{ij} zwischen den atomaren Niveaus i und j, da $c_{ij} \sim \frac{n_e}{\sqrt{T}}$ gilt, und hohen radiativen Raten R_{ij}, da $R_{ij} \sim T^{\alpha}$ mit $\alpha > 1$ gilt. Dies führt zu Abweichungen vom LTE. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf NLTE-Modellrechnungen.

2.2 Pionierarbeit

Zur Berechnung eines Sternatmosphärenmodells ist es notwendig, die Gleichungen für Strahlungstransport, radiatives und hydrostatisches Gleichgewicht sowie für die Besetzungszahlen konsistent zu lösen. Pionierarbeit haben hierbei Auer & Mihalas (1969) geleistet, deren Methode der vollständigen Linearisierung (CL) den Durchbruch bei der Berechnung von NLTE-Atmosphären brachte. Sie erwies sich als numerisch sehr stabil, hatte allerdings den Nachteil, daß mit ihr nur einfache Modelle, bestehend aus Wasserstoff und Helium, berechnet werden konnten, da die Anzahl der Gleichungen aufgrund zunehmender numerischer Ungenauigkeiten auf den damaligen 32bit-Rechnern bei der Inversion des Gleichungssystems auf wenige hundert pro Tiefenpunkt beschränkt war. Es mußten Wege gefunden werden, die Zahl der zu linearisierenden Gleichungen zu reduzieren, um mehr Elemente berücksichtigen zu können.

2.3 Numerische Fortschritte

Anderson macht 1985 den Ansatz, die Transportgleichung nicht für jede Frequenz zu linearisieren, sondern zuerst mehrere Frequenzpunkte zu Blöcken zuammenzufassen. Einen anderen Weg gingen Werner & Husfeld (1985) mit dem sogenannten ALI[1]-Verfahren. Die Transportgleichung wurde hierbei aus dem Linearisierungsschema herausgenommen, indem eine implizite Näherungslösung für das Strahlungsfeld angesetzt wurde. Durch Iteration erfolgte dann die exakte Lösung. Dadurch war zum einen die Zahl der Frequenzpunkte nicht mehr kritisch, zum anderen konnte wegen der fehlenden expliziten Tiefenkopplung getrennt für jede Tiefe nach der Newton-Raphson-Methode[2] iteriert werden. Hubeny & Lanz (1995) kombinierten das ALI-Verfahren mit der Methode der vollständigen Linearisierung, indem sie die Transportgleichung bezüglich ausgewählter Frequenzpunkte, bevorzugt solcher von Resonanzlinien, linearisierten, den Hauptteil aber nach dem ALI-Verfahren lösten. Eine sehr schöne Darstellung verschiedener ALI-Varianten findet sich zum Beispiel bei Hubeny (1991).

2.4 Eisengruppenelemente

Der nächste große Meilenstein war die Einbeziehung der Eisengruppenelemente in die Berechnung der Atmosphärenmodelle. Trotz ihrer im Vergleich zu Helium geringen Häufigkeit haben die Elemente der Eisengruppe aufgrund ihrer unzähligen Linienübergänge einen deutlichen Anteil an der Opazität heißer Sterne, da das Gros der Linien oft in dem Bereich des Spektrums liegt, in dem bei sehr heißen Sternen und weißen Zwergen Wasserstoff und Helium keinen Beitrag mehr zur Opazität leisten (EUV- und Röntgenbereich). Anderson gelangen mit seinem oben erwähnten Ansatz erste Modelle, Dreizler & Werner (1993) haben diesen Ansatz auf das ALI-Verfahren übertragen.

2.5 Sphärisch-symmetrische Modelle

Schon 1974 untersuchten Hummer & Mihalas (1974) Sphärizitätseffekte bei NLTE-Atmosphärenmodellen, allerdings mit ganz einfachen Atommodellen. Doch schon ihre sphärischen NLTE-Modelle leuchtkräftiger O-Sterne zeigten spektrale Eigenheiten, die mit Beobachtungen weit besser übereinstimmten als diejenigen von planparallelen NLTE-Modellen.

Gruschinske & Kudritzki (1979) untersuchten sphärisch ausgedehnte NLTE-Modellatmosphären unterleuchtkräftiger O-Sterne mit geringer Oberflächenschwerebeschleunigung. Sie kamen zu dem Ergebnis, daß die Sphärizitätseffekte klein seien im Vergleich zur damaligen Beobachtungsgenauigkeit und deshalb die Berechnung planparallelen Modellatmosphären ausreichen würde. Inzwischen wurde allerdings die Beobachtungsgenauigkeit erheblich verbessert und durch die Satellitenprojekte ORFEUS, HUT, FUSE, EUVE, Chandra und XMM sind auch die Spektralbereiche des fernen und extremen Ultraviolett sowie der Röntgenbereich zugänglich. Dies macht es erforderlich, die Genauigkeit der Modelle zu verbessern.

In den letzten Jahren hat sich Kubat der Sphärizitätseffekte angenommen. Er untersuchte z.B. planparallele und sphärisch-symmetrische NLTE-Modellatmosphären heliumreicher Zentralsterne Planetarischer Nebel (Kubat, 1997). Es zeigte sich erwartungsgemäß, daß die Effekte bei Sternen mit geringer Oberflächenschwerebeschleunigung, die also ausgedehnte Atmosphären besitzen, deutlicher sind als bei kompakten Sternen. So sind z.B. die Temperaturen und der Kontinuumsfluß kleiner bei

[1] Accelerated Lambda Iteration

[2] Verfahren zur numerischen Lösung nichtlinearer Gleichungen, auch als Newton-Verfahren bekannt (z.B. Bronstein et al. (1995))

sphärischen als bei planparallelen Modellen und Absorptionslinien erscheinen tiefer.Ähnliches fand er in seiner Arbeit über NLTE-Modellatmosphären heißer Weißer Zwerge (Kubat, 1995). Zu erwähnen ist auch noch seine Arbeit über die Anwendung der ALI-Methode für sphärisch-symmetrische Modelle (Kubat, 1994, 1996). Kubat benutzte für seine Arbeiten Wasserstoff-Helium-Mischungen beziehungsweise reine Wasserstoffatmosphären. Die Wirkung von Kohlenstoff, Stickstoff und Sauerstoff (CNO) oder gar Eisengruppenelementen in Kombination mit sphärischer Geometrie wurde bisher noch nicht untersucht.

Teil II

Theorie der Sternatmosphären

Die Schichten des Sterns, aus denen die von uns beobachtete Strahlung stammt, werden als die Atmosphäre des Sterns bezeichnet. Hierbei kann gegebenenfalls noch eine Feinunterteilung vorgenommen werden in Photosphäre, Chromosphäre, Korona und Sternwind.

Um eine Sternatmosphäre zu charakterisieren, sind nur einige wenige Parameter nötig, nämlich die Effektivtemperatur[3] T_{eff}, die Oberflächenschwerebeschleunigung g, die chemische Zusammensetzung und im sphärischen Fall noch die Sternmasse M. Mit diesen Parametern werden nun die Grundaufbaugleichungen der Sternatmosphären, dies sind die Gleichungen für radiatives und hydrostatisches Gleichgewicht, für die Besetzungszahlen und für den Strahlungstransport, gelöst. Aus dem so berechneten Atmosphärenmodell läßt sich dann ein synthetisches Spektrum berechnen, das mit der Beobachtung verglichen werden kann.

In den folgenden Kapiteln werden diese Grundgleichungen sowie deren Lösung beschrieben. Den Schwerpunkt bildet hierbei die Darstellung der Unterschiede zwischen planparalleler und sphärisch-symmetrischer Geometrie. Eine detaillierte Behandlung der Theorie der Sternatmosphären würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, hierzu empfehlen sich die mehrere hundert Seiten umfassenden Standardwerke (z.B. Unsöld (1955), Mihalas (1978)).

Am Ende dieses Abschnitts wird ein Überblick über den implementierten Programmablauf gegeben.

[3] Die Effektivtemperatur eines Sterns ist definiert als diejenige Temperatur, die ein schwarzer Körper hat, der pro Flächen- und Zeiteinheit denselben Energiebetrag abstrahlt wie der Stern.

Kapitel 3

Das Strahlungsfeld

3.1 Die Momente des Strahlungsfeldes

Die Bestimmung des Strahlungsfeldes ist die grundlegende Problemstellung bei der Berechnung von Sternatmosphären. Das Strahlungsfeld läßt sich durch die spezifische Intensität I_ν vollständig beschreiben. Man denkt sich hierbei am Ort z ein Einheitsflächenelement dA, dessen Normale mit derjenigen der Sternoberfläche den Winkel θ bildet ($0 \leq \theta \leq \pi$) (siehe Abbildung 3.1 und Abbildung 3.2).

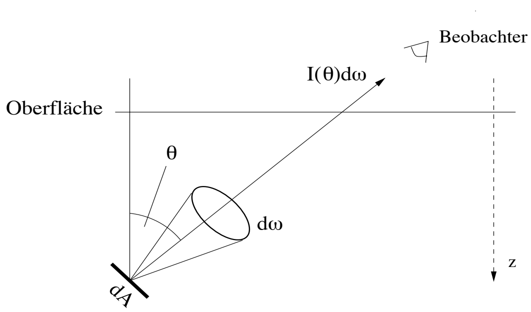

Abbildung 3.1: Schematische Darstellung des Strahlungsfeldes in planparalleler Geometrie

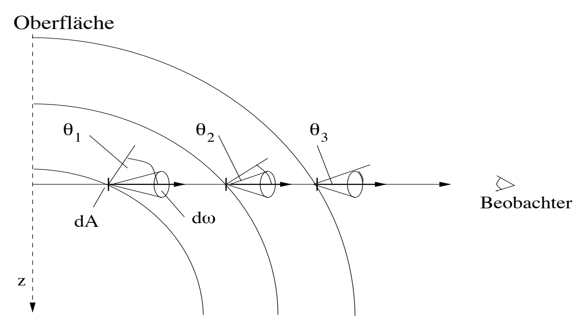

Abbildung 3.2: Schematische Darstellung des Strahlungsfeldes in sphärischer Geometrie

Die spezifische Intensität ist dann die Energie δE, die während des Zeitraumes dt im Frequenzintervall ν, $\nu + d\nu$ durch das Flächenelement dA in den Raumwinkel $d\omega$ transportiert wird.

$$I_\nu(z,\theta,\nu) = \frac{\delta E}{dA\, d\nu\, d\omega\, dt}$$

Sphärische Geometrie führt hierbei zu einer geometrischen „Verdünnung" des Energieflusses in Richtung der äußeren Schichten. Wie man in Abbildung 3.2 sieht, schneidet der Sehstrahl, entlang welchem das Strahlungsfeld berechnet wird, die einzelnen Kugelschalen der Atmosphäre nach außen hin in immer kleineren Winkeln θ. Einfach gesagt, wird dieselbe Energie auf immer größere Flächen verteilt, so daß letztendlich der Fluß pro Flächeneinheit geringer wird. Da von stationären[1] Atmo-

[1] Die Zeitskalen des hydrostatischen und radiativen Gleichgewichts sind sehr klein gegenüber der Entwicklungszeit des Sterns und damit der Sternatmosphäre. Im Moment einer Supernovaexplosion z.B. ist dagegen die Annahme der Stationarität nicht mehr erfüllt.

sphären ausgegangen wird, kann die Zeitabhängigkeit im folgenden vernachlässigt werden.

Mittelt man nun I_ν über alle Raumwinkel θ, so erhält man mit $\mu = \cos(\theta)$ das nullte Moment des Strahlungsfeldes, die sogenannte mittlere Intensität J_ν

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu(\mu, z)d\mu.$$

Um den Strahlungsfluß $\mathcal{F}_\nu$, den Netto-Energiefluß durch die Einheitsfläche senkrecht zu z, zu bestimmen, berechnet man das erste Moment des Strahlungsfeldes. Dieses wird auch als Eddingtonfluß H_ν bezeichnet:

$$H_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu(\mu, z)\mu\, d\mu.$$

Dieser ist mit dem Strahlungsfluß $\mathcal{F}_\nu$ und dem astrophysikalischen Fluß F_ν verbunden über

$$\mathcal{F}_\nu = \pi F_\nu = 4\pi H_\nu.$$

Das zweite Moment des Strahlungsfeldes, auch K-Integral genannt, wird zur Beschreibung des Strahlungsdruckes verwendet und berechnet sich zu

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu(\mu, z)\mu^2\, d\mu.$$

Alle drei Momente des Strahlungsfeldes sind für die Lösung des Strahlungstransportproblems außerordentlich wichtig.
Die Sternparameter Leuchtkraft[2] L, Radius R und Effektivtemperatur T_{eff} sind mit dem Strahlungsfluß verknüpft über die Beziehung

$$L = 4\pi R^2 \mathcal{F} = 4\pi R^2 \sigma {T_{\mathrm{eff}}}^4,$$

die auch als Definitionsgleichung für die Effektivtemperatur aufgefaßt werden kann. σ ist hierbei die Stefan-Boltzmann-Konstante, definiert als $\sigma = 2\pi^5 k^4/(15c^2h^3)$, wobei k die Boltzmann-Konstante, c die Lichtgeschwindigkeit und h das Plancksche Wirkungsquantum sind. $\mathcal{F} = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu\, d\nu$ ist der über ν integrierte Strahlungsfluß $\mathcal{F}_\nu$.

[2]Gesamtenergieabgabe durch Strahlung pro Zeiteinheit

3.2 Emission und Absorption

Der Transport der Strahlung durch das Plasma der Sternatmosphäre wird durch die Absorptions- und Emissionskoeffizienten des Sternmaterials bestimmt. Durchdringt ein Strahl der Intensität I_ν im Fre-

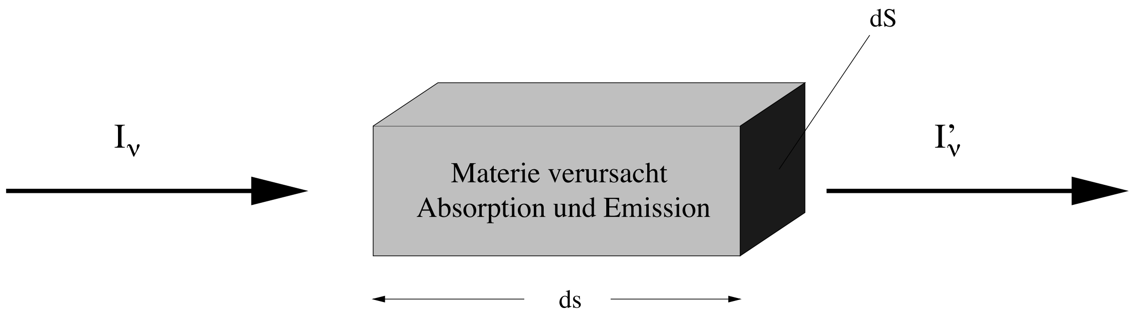

Abbildung 3.3: Einfluß von Absorption und Emission auf die Intensität

quenzbereich $d\nu$ im Raumwinkel $d\omega$ in einem Volumenelement der Länge ds mit dem Querschnitt dS Material mit dem Absorptionskoeffizienten $\kappa(\nu)$, so wird der Strahl um den Energiebetrag δE geschwächt:

$$\delta E = \kappa(\nu)\, I_\nu\, ds\, dS\, d\nu\, d\omega.$$

Der Absorptionkoeffizient $\kappa(\nu)$ ist hierbei die Summe über alle atomaren Absorptionsquerschnitte multipliziert mit der Teilchendichte der entsprechenden Absorber, den atomaren Besetzungszahlen. Der Emissionskoeffizient wird analog definiert, führt allerdings zu einer Verstärkung der Intensität:

$$\delta E = \eta_\nu\, ds\, dS\, d\nu\, d\omega.$$

Die beiden Koeffizienten $\kappa(\nu)$ und η_ν werden auch als Opazität und Emissivität bezeichnet, der Quotient η/κ heißt Quellfunktion S. Um die Opazitäten und die Emissivitäten konkret zu berechnen, müssen die gebunden-gebunden Übergänge der Spektrallinien, die gebunden-frei Übergänge der Kontinua und die frei-frei Übergänge der Bremsstrahlung berücksichtigt werden. Bei heißen Sternen kommt außerdem noch die Streuung von Photonen an freien Elektronen dazu (Thomsonstreuung). Als Effekte der Linienverbreiterung treten hierbei Strahlungsdämpfung, Druckverbreiterung und Dopplerverbreiterung aufgrund thermischer und turbulenter Bewegungen auf. Für diese Berechnungen ist es nötig, die atomaren Besetzungszahlen zu kennen. Im thermodynamischen Gleichgewicht ist das Strahlungsfeld gleich der Planckfunktion, und die Besetzungszahlen ergeben sich aus der Saha-Boltzmann-Gleichung. Im LTE ist lediglich die Quellfunktion gleich der Planckfunktion. Auch hier lassen sich die atomaren Besetzungszahlen, bei bekannter Elektronendichte und Temperatur, mit Hilfe der Saha-Boltzmann-Gleichung bestimmen. Die Atmosphären heißer Sterne befinden sich im NLTE, die Besetzungszahlen müssen dann durch Lösung der Ratengleichungen bestimmt werden (siehe Kapitel 5).

Kapitel 4

Der Strahlungstransport

Um das Strahlungsfeld zu bestimmen, muß die Strahlungstransportgleichung gelöst werden. Diese beschreibt die Intensitätsänderung durch Absorption und Emission eines Strahls entlang seines Wegs durch die Sternatmosphäre. Im folgenden werden planparallele und sphärische Geometrie getrennt betrachtet, da sich die Gleichungen und Lösungswege erheblich unterscheiden.

4.1 Transportgleichung in planparalleler Geometrie

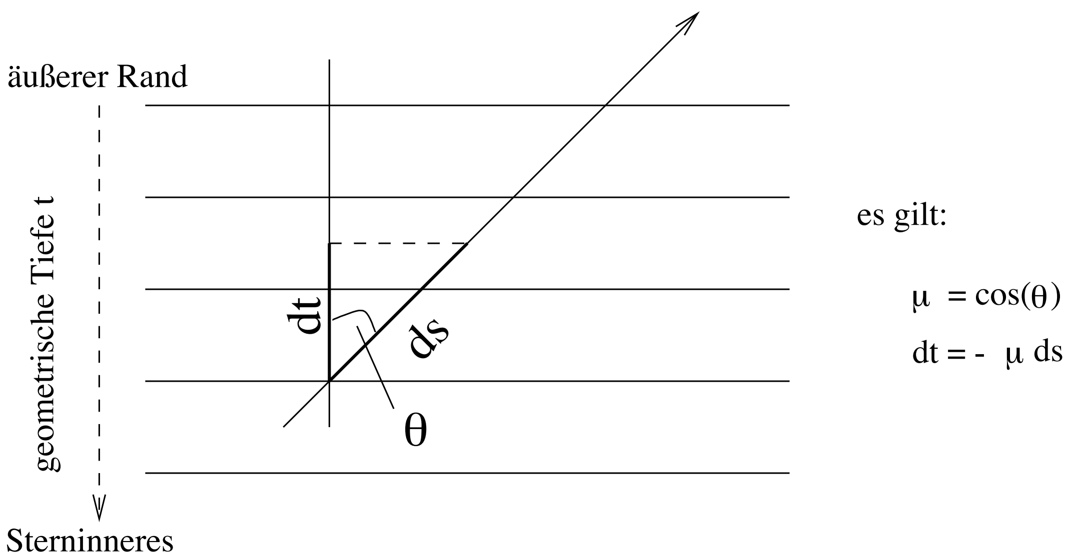

Abbildung 4.1: Strahlungstransport entlang des Weges ds in planparalleler Geometrie

Läuft ein Strahl entlang des Weges $ds = -\frac{1}{\mu}dt$ (Abb. 4.1) durch die Atmosphäre, so wird seine Intensität einerseits infolge von Absorption geschwächt, andererseits aber durch Emission verstärkt. Dies wird im zeitunabhängigen Fall durch die Strahlungstransportgleichung in folgender Form beschrieben:

$$-\mu\frac{dI_\nu(\nu,\mu)}{dt} = \eta_\nu - \kappa(\nu)I_\nu(\nu,\mu).$$

Mit der Quellfunktion $S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\kappa(\nu)}$ lautet die Strahlungstransportgleichng

$$-\mu \frac{dI_\nu(\nu,\mu)}{dt} = \kappa(\nu)\left(S_\nu(\nu) - I_\nu(\nu,\mu)\right).$$

Die Gleichungen für die Momente der Transportgleichung ergeben sich durch Winkelintegration über μ (bei isotroper Quellfunktion)

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\,\mu\,d\mu\right) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\,d\mu - \frac{1}{2}S_\nu \int_{-1}^{1} d\mu$$

beziehungsweise

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\,\mu^2\,d\mu\right) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\,\mu\,d\mu - \frac{1}{2}S_\nu \int_{-1}^{1} \mu\,d\mu$$

und lauten dann für das nullte Moment

$$\frac{dH_\nu}{d\tau} = J_\nu - S_\nu$$

und für das erste Moment

$$\frac{dK_\nu}{d\tau} = H_\nu.$$

Hierbei wurde von der geometrischen Tiefe t auf die frequenzabhängige optische Tiefe τ übergegangen, die definiert ist durch $d\tau = \kappa(\nu)dt$.

4.2 Transportgleichung in sphärischer Geometrie

In sphärischer Geometrie ist die Beschreibung des Strahlwegs etwas komplizierter. Betrachtet man in Abbildung 4.2 das rechtwinklige Dreieck $ds, dr, -rd\theta$, dann gilt: $dr = ds\cos(\theta)$, also$\frac{dr}{ds} = \cos(\theta) = \mu$. Außerdem gilt $\sin(\theta + d\theta) \approx \sin(\theta) = \frac{-rd\theta}{ds}$, so daß sich

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{d\mu}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = \frac{1-\mu^2}{r}$$

ergibt. Die linke Seite der Strahlungstransportgleichung schreibt sich in sphärischer Geometrie demnach als

$$\begin{aligned}
\frac{dI_\nu}{ds} &= \frac{\partial I_\nu}{\partial r}\frac{dr}{ds} + \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu}\frac{d\mu}{ds} \\
\frac{dI_\nu}{ds} &= \frac{\partial I_\nu}{\partial r}\mu + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial I_\nu}{\partial \mu}.
\end{aligned}$$

Natürlich kommt es auch in sphärischer Geometrie zu einer Intensitätsänderung aufgrund von Absorption und Emission entlang des Weges ds. Die vollständige Strahlungstransportgleichung in sphärischer Geometrie lautet daher

$$\mu\frac{\partial I_\nu(r,\mu,\nu)}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial I_\nu(r,\mu,\nu)}{\partial \mu} = \kappa(\nu,r)(S_\nu(r,\nu) - I_\nu(r,\mu,\nu)).$$

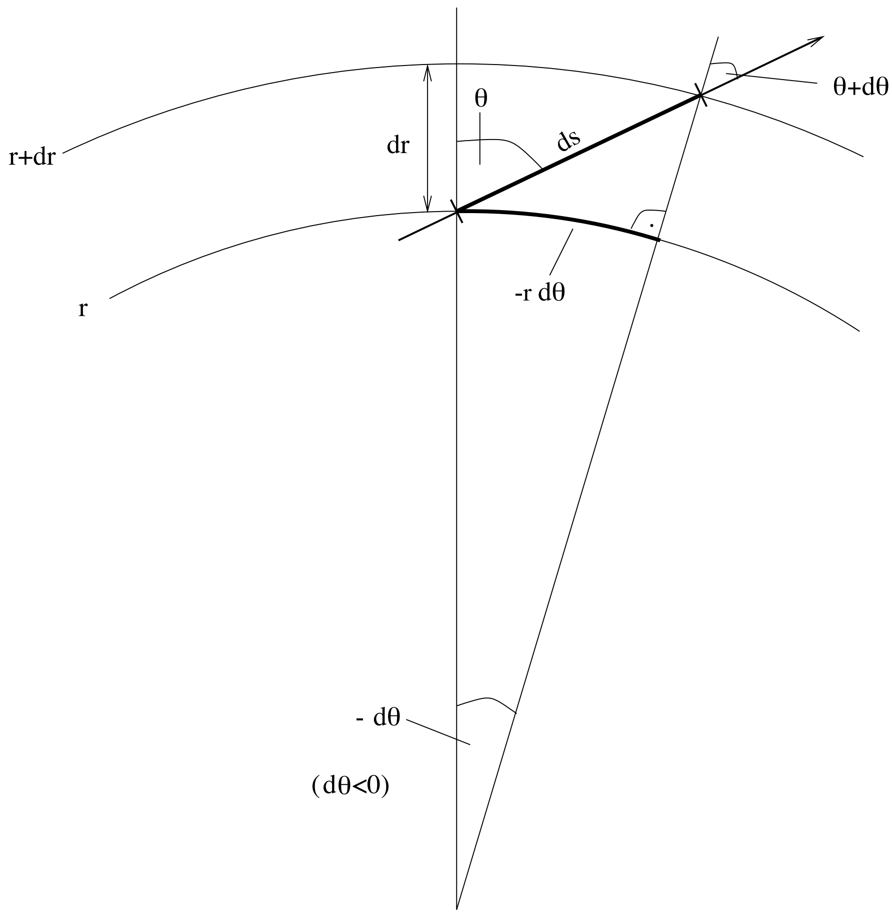

Abbildung 4.2: Strahlungstransport entlang des Weges ds in sphärischer Geometrie

Auch hier erhält man durch Winkelintegration über μ die Gleichungen der Momente des Strahlungstransports, so für das nullte Moment

$$\frac{\partial}{\partial \tau_\nu}(r^2 H_\nu) = r^2 (J_\nu - S_\nu)$$

und für das erste Moment

$$\frac{\partial}{\partial \tau_\nu}(f_\nu q_\nu r^2 J_\nu) = q_\nu r^2 H_\nu,$$

wobei q_ν der von Auer (1971) eingeführte Sphärizitätsfaktor ist, definiert durch

$$\ln(r^2 q_\nu) = \int_{r_c}^{r} \frac{3 f_\nu - 1}{r' f_\nu} dr' + \ln(r_c{}^2),$$

$f_\nu = \frac{K_\nu}{J_\nu}$ die Eddingtonfaktoren sind und r_c der core-Radius (siehe 4.4) des Sterns ist.

4.3 Lösung der Transportgleichung in planparalleler Geometrie

Die Quellfunktion S wird bis auf Streuterme als bekannt vorausgesetzt. Nun wird die Strahlungstransportgleichung, die bisher als Differentialgleichung erster Ordnung vorliegt, in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung umgeformt. Hierzu werden die Feautriervariablen u und v eingeführt, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} u_{\nu\mu}(\tau_\nu) &= \frac{1}{2}(I_\nu(+\mu)+I_\nu(-\mu)) = \frac{1}{2}(I^+_{\nu\mu}+I^-_{\nu\mu}) \\ \mathrm{v}_{\nu\mu}(\tau_\nu) &= \frac{1}{2}(I_\nu(+\mu)-I_\nu(-\mu)) = \frac{1}{2}(I^+_{\nu\mu}-I^-_{\nu\mu}) \end{aligned}$$

$I^+_{\nu\mu}$ ist hierbei die Intensität in positiver z-Richtung (Auswärtsstrahlung), $I^-_{\nu\mu}$ die Intensität in negativer z-Richtung (Einwärtsstrahlung). Die Strahlungstransportgleichung lautet für Ein- und Auswärtsstrahlung

$$\pm\mu\left(\frac{d}{d\tau_\nu}I_\nu(\pm\mu)\right) = S_\nu - I_\nu(\pm\mu).$$

Die Addition beider Transportgleichungen ergibt mit Hilfe der Feautriervariablen

$$\mu\frac{d}{d\tau}\mathrm{v}_{\nu\mu} = S_\nu - u_{\nu\mu},$$

die Subtraktion

$$\mu\frac{d}{d\tau}u_{\nu\mu} = -\mathrm{v}_{\nu\mu}.$$

Setzt man diese beiden Gleichungen ineinander ein, dann erhält man die neue Transportgleichung in Form einer Differentialgleichung zweiter Ordung

$$\mu^2\frac{d^2}{d\tau^2}u_{\nu\mu} = u_{\nu\mu} - S_\nu,$$

wobei S_ν auch den Thomsonstreuterm enthält:

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu + n_e\sigma_e\int u_{\nu\mu}d\mu}{\kappa(\nu)}$$

Hierbei sind n_e die Elektronendichte und σ_e der Elektronenstreuquerschnitt.
Um die Differentialgleichung des Strahlungstransports lösen zu können, werden Randbedingungen benötigt. Da keine Einstrahlung von außen erfolgen soll, $I^-_{\nu\mu}(\tau=0)=0$, lautet die äußere Randbedingung

$$\mu\frac{d}{d\tau_\nu}u_{\nu\mu}\bigg|_{\tau_\nu=0} = u_{\nu\mu}(0).$$

Am inneren Rand ($\tau=\tau_{max}$) wird die Einstrahlung mit $I^+_{\nu\mu}$ vorgegeben, so daß die innere Randbedingung

$$\mu\frac{d}{d\tau_\nu}u_{\nu\mu}\bigg|_{\tau=\tau_{max}} = I^+_{\nu\mu} - u_{\nu\mu}(\tau_{max})$$

lautet. Die Idee hierbei ist, Energie gemäß der Effektivtemperatur über den inneren Rand zu transportieren. Neben der Diffusionsnäherung (Mihalas, 1978) wird ausgenutzt, daß in großen optischen Tiefen $S_\nu = B_\nu$ ist. $I^+_{\nu\mu}$ lautet dann explizit

$$I^+_{\nu\mu} = B_\nu + \frac{3\mu}{\kappa(\nu)} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{H}{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa(\nu)} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}.$$

B_ν ist hierbei die Planckfunktion und $H = \sigma T_{\mathrm{eff}}{}^4/4\pi$ der nominale Eddingtonfluß.
Die Differentialgleichung wird als Differenzengleichung dargestellt und mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens (in diesem Zusammenhang auch als Feautrier-Verfahren bezeichnet) gelöst. Durch Winkelintegration der nun bekannten Feautriervariablen $u_{\nu\mu}$ wird dann schließlich das Strahlungsfeld J_ν bestimmt:

$$J_\nu = \int_0^1 u_{\nu\mu}\, d\mu.$$

4.4 Lösung der Transportgleichung in sphärischer Geometrie

In sphärischer Geometrie erfolgt die Lösung des Srahlungstransports auf zwei unterschiedliche Arten, die miteinander kombiniert werden. Es gibt zum einen die Methode der„ray-by-ray solution“, bei der für jeden Impaktparameter (siehe Abbildung 4.3) der Strahlungstransport entlang des entsprechenden Strahls gelöst wird. Bei der zweiten Methode wird die kombinierte Momentengleichung für J_ν gelöst und damit das Strahlungsfeld bestimmt. Der Grund für dieses Vorgehen ist die Behandlung der Thomsonstreuung. Berücksichtigt man im planparallelen Fall die Thomsonstreuung, dann werden die bei der Lösung der Differenzengleichung entstehenden Matrixeinträge selbst zu Matrizen, wobei ihr Rang gleich der Anzahl der Winkelpunkte ist. Im planparallenen Fall wird üblicherweise mit drei Winkelpunkten gerechnet, im sphärischen Fall dagegen mit bis zu hundert. Die konsistente Berücksichtigung der Thomsonstreuung im ray-by-ray-Verfahren hätte einen erheblichen Rechenaufwand zur Folge. Deshalb wird im sphärischen Fall die Thomsonstreuung in der ray-by-ray-Lösung zunächst nur näherungsweise berücksichtigt. Im Falle der Momentengleichung dagegen bleiben die Matrixeinträge trotz Einbeziehung der Thomsonstreuung bei der Lösung der entsprechenden Differenzengleichung Skalare, da es sich bei der Momentengleichung um eine Differentialgleichung für die winkelgemittelte Intensität J_ν handelt. Beide Methoden werden abwechselnd angewandt, bis eine hinreichende Konvergenz erreicht ist.

4.4.1 Ray-by-Ray-Lösung

Es wird davon ausgegangen, daß die Quellfunktion S_ν bekannt ist, insbesondere auch die Thomson-Emissivität $\eta^T_\nu = n_e \sigma_e J_\nu$. Hierzu wird zunächst J_ν durch B_ν genähert. Zu jedem Impaktparameter p_i gibt es, wie man in Abbildung 4.3 sieht, einen Strahl durch die Atmosphäre. Für jeden Strahl wird nun die Strahlungstransportgleichung als Differentialgleichung zweiter Ordnung geschrieben, indem wieder die Feautrier-Variablen u und v eingeführt werden:

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} u(z, p_i, \nu) = u(z, p_i, \nu) - S(r, \nu)$$

wobei $r = \sqrt{(p_i{}^2 + z^2)}$ und $d\tau = d\tau(z, p_i, \nu) = -\kappa(r, \nu) dz$ sind.

Da in sphärischer Geometrie allerdings keine explizite Winkelkopplung durch die Thomsonemissivität besteht, denn diese wurde als bekannt vorausgesetzt, sind die Feautriermatrizen Skalare.
Als äußere Randbedingung für die Strahlen, die den Kern des Sterns treffen (core-rays) und diejenigen, die nur durch die Atmosphäre laufen (non-core-rays) wird gefordert, daß es keine Einstrahlung von außen gibt, also $I^-_{\nu\mu}(\tau = 0) = 0$ ist:

$$\frac{d}{d\tau_\nu} u_{\nu\mu}\bigg|_{\tau_\nu=0} = u_{\nu\mu}(\tau = 0).$$

Als innere Randbedingung für die core-rays gilt

$$\frac{d}{d\tau_\nu} u_{\nu\mu}\bigg|_{\tau=\tau_{max}} = I^+_{\nu\mu} - u_{\nu\mu}(\tau_{max})$$

mit vorgegebenem $I^+_{\nu\mu}$. Hierbei wird $I^+_{\nu\mu}$ analog zum planparallelen Fall berechnet, wobei H durch Skalierung mit $(\frac{R}{r_c})^2$ an sphärische Geometrie angepaßt wird. R bezeichnet hier den Sternradius bei $\tau_{Ross} = \frac{2}{3}$, r_c den core-Radius.
Für die non-core-rays gilt aus Symmetriegründen am inneren Rand die Spiegelrandbedingung $I^+_{\tau_{max}} = I^-_{\tau_{max}}$, also

$$\frac{d}{d\tau_\nu} u_{\nu\mu}\bigg|_{\tau=\tau_{max}} = 0.$$

Die Differentialgleichung wird nun in eine Differenzengleichung umgeformt und analog zum planparallelen Fall gelöst.

Da jede Radiusschale von den einzelnen Strahlen in unterschiedlichen Winkeln geschnitten wird, liegt für jede Radiusschale die Intensität für verschiedene Winkel, also verschiedene Richtungen vor (Abbildung 4.3). Man kann die Intensitäten jeder Radiusschale folglich bequem winkelintegrieren und so J_ν und K_ν für jede Radiusschale bestimmen. Aus J_ν und K_ν lassen sich dann die Eddingtonfaktoren $f_\nu = \frac{K_\nu}{J_\nu}$ berechnen, die für die Lösung der kombinierten Momentengleichung benötigt werden.

4.4.2 Momentengleichung

Das zweite Verfahren, das zur Lösung des Strahlungstransportproblems angewendet wird, ist die Methode der kombinierten Momentengleichung, die auch als Methode der variablen Eddingtonfaktoren bezeichnet wird. Ausgangspunkt sind hierbei das nullte und erste Moment der Strahlungstransportgleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 H_\nu) &= \kappa^0_\nu (S_\nu - J_\nu) \\ \frac{\partial}{\partial r}K_\nu + \frac{3K_\nu}{r} - \frac{J_\nu}{r} &= -\kappa^1_\nu H_\nu\,, \end{aligned}$$

wobei sich das erste Moment mit Hilfe des Sphärizitätsfaktors q_ν auch schreiben läßt als

$$\frac{d}{dr}(q_\nu f_\nu r^2 J_\nu) = -q_\nu \kappa^1_\nu r^2 H_\nu.$$

Es ist hierbei zu beachten, daß der Absorptionkoeffizient κ^0_ν aus der nullten Momentengleichung keinen Thomsonstreuanteil besitzt, da dieser aus der Gleichung analytisch herausgekürzt werden kann.

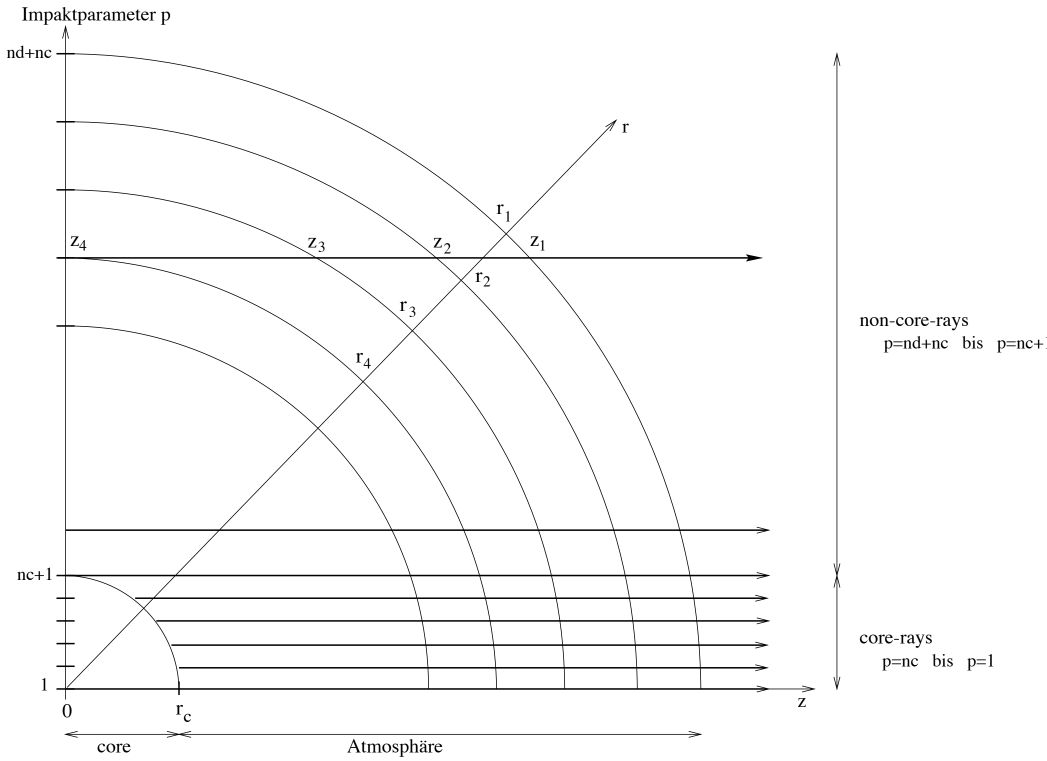

Abbildung 4.3: Geometrie der Modellatmosphäre. Zu jedem Impaktparameter p gibt es einen Strahl, entlang welchem die Strahlungstransportgleichung bei der„ray-by-ray solution“ gelöst wird. Hierbei werden die Strahlen, die den Kern des Sterns treffen, als core-rays, und diejenigen, die nur durch die Atmosphäre laufen, als non-core-rays bezeichnet, ihre Anzahl beträgt nc beziehungsweise nd. Diese Parameter können frei gewählt werden.

Bei der ersten Momentengleichung dagegen enthält der Absorptionkoeffizient κ_ν^1 noch den Thomsonstreuanteil.

Als Abschluß des Gleichungssystems wird die Definitionsgleichung der variablen Eddingtonfaktoren verwendet

$$K_\nu = f_\nu J_\nu.$$

Aus numerischen Gründen empfiehlt es sich, die mit r^2 skalierten Größen $\tilde{J}_\nu = r^2 J_\nu, \tilde{H}_\nu = r^2 H_\nu, \tilde{S}_\nu = r^2 S_\nu$ zu verwenden (Koesterke, priv. Mitteilung).

Leitet man nun die erste Momentengleichung nochmals ab und setzt sie in die nullte Momentengleichung ein, ergibt sich die kombinierte Momentengleichung

$$-\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{q_\nu \kappa_\nu^1}\frac{d}{dr}(q_\nu f_\nu \tilde{J}_\nu)\right) = \kappa_\nu^0(\tilde{S}_\nu - \tilde{J}_\nu).$$

Die äußere Randbedingung lautet $I_{\nu\mu}^-(\tau = 0) = 0$, es ergibt sich somit für $\tau = 0$

$$\frac{1}{q_\nu}\frac{\partial}{\partial r}(f_\nu q_\nu \tilde{J}_\nu)\bigg|_{\tau=0} = \kappa_\nu^1 h_\nu(\tau = 0)\tilde{J}_\nu\bigg|_{\tau=0}.$$

Am inneren Rand ist $I_{\nu\mu}^+$ bei τ_{max} vorgegeben, wodurch $H_\nu^+ = \int\limits_{\mu=0}^{1} I_\nu^+(\mu)\,\mu\,d\mu$ gilt. Wie schon bei der

Lösung der ray-by-ray-Gleichung wird auch hier der sphärischen Geometrie bei der Berechnung von $I^+_{\nu\mu}$ Rechnung getragen. Für $\tau = \tau_{max}$ folgt also

$$\frac{1}{q_\nu}\frac{\partial}{\partial r}(f_\nu q_\nu \tilde{J}_\nu)\bigg|_{\tau_{max}} = \tilde{H}^+(\tau_{max}) - \kappa^1_\nu h_\nu(\tau = \tau_{max})\tilde{J}_\nu\bigg|_{\tau_{max}}.$$

h_ν sind die speziellen Eddingtonfaktoren, definiert durch

$$h_\nu = \frac{\int\limits_{\mu=0}^{1} u(\mu)\mu\, d\mu}{\int\limits_{\mu=0}^{1} u(\mu) d\mu}.$$

Zur Lösung der Momentengleichung verschafft man sich nach der Diskretisierung mit Hilfe einer Taylorentwicklung Randbedingungen zweiter Ordnung (siehe Anhang B). Nach Umformung der Differentialgleichung in eine Differenzengleichung läßt sich das entstandene tridiagonale Gleichungssystem bequem mit bewährten Methoden lösen.

Kapitel 5

NLTE Ratengleichungen

Will man Sternatmosphären im NLTE berechnen, so kann man die atomaren Besetzungszahlen n_i, die man zur Bestimmung von $\kappa(\nu)$ und η_ν braucht, nicht aus den Saha-Boltzmann-Gleichungen berechnen, da in diese nur die lokale Temperatur und Elektronendichte eingehen. Im NLTE sind die Besetzungszahlen aber auch abhängig vom Strahlungsfeld, welches wiederum betimmt ist durch die Besetzungszahlen in allen Tiefen der Atmosphäre.

Als Ersatz für die Saha-Boltzmann-Gleichungen betrachtet man nun sämtliche mikroskopischen Prozesse, die zur Be- und Entvölkerung eines atomaren Niveaus beitragen, also durch Strahlung und Stöße verursachte An- und Abregung sowie Ionisation und Rekombination. Man stellt für jedes Niveau eine Gleichung auf, die die zeitliche Änderung der Besetzungsdichte n_i des Niveaus i als Summe aller Be- und Entvölkerungsprozesse des Niveaus beschreibt. Das so entstehende System der statistischen Gleichungen bestimmt die Besetzungszahlen und ist in planparalleler und sphärischer Geometrie identisch. Es kann entweder durch vollständige Linearisierung gelöst werden (Auer & Mihalas, 1969) oder durch die Methode der genäherten Λ-Operatoren beziehungsweise des ALI-Verfahrens (Cannon, 1973; Scharmer, 1981; Werner & Husfeld, 1985).

Bei der Λ-Iteration werden die Lösung des Strahlungstransports (formal als sog. Λ-Operator aufgefaßt) und die Ratengleichungen separiert, damit die Dimension der Gleichungssysteme reduziert und das Gleichungssystem iterativ gelöst. Da die Λ-Iteration ein Photon aber nur entlang eines optischen Tiefenintervalls $\Delta\tau \simeq 1$ verfolgt, ist sie nur in geringen optischen Tiefen sinnvoll anwendbar. In den Linienkernen, in denen der Absorptionskoeffizient vieltausendfach höher ist als im Kontinuum, bewirkt der Λ-Operator dagegen nur sehr wenig (Unsöld, 1955).

Beim ALI-Verfahren trennt man die Gleichungssysteme auch, berücksichtigt aber bei der Lösung der Ratengleichung den Strahlungstransport näherungsweise mit Hilfe sogenannter genäherter Λ-Operatoren. Werden diese nun als lokale Operatoren aufgestellt, zerfällt das Ratengleichungssystem in ein tiefenunabhängiges Gleichungssystem, wobei in der aktuellen Tiefe J_ν eine lineare Funktion der lokalen Quellfunktion S_ν ist. In großen optischen Tiefen τ ist die Näherung $J_\nu \approx S_\nu$ sehr gut erfüllt, zu kleinen optischen Tiefen hin wird der Fehler beim ALI-Verfahren allerdings immer größer, hier wird dann die Λ-Iteration angewandt. Da es sich um nichtlineare Gleichungen handelt, die zur Lösung linearisiert werden müssen, benötigt man die Ableitungen der Ratenmatrix nach der Quellfunktion, der Elektronendichte und der Temperatur sowie die Ableitungen der Quellfunktion nach den Besetzungszahlen, der Elektronendichte und der Temperatur. Diese Ableitungen sind der rechenzeitintensivste Schritt bei der Erstellung von Modellatmosphären.

Bisher wurden die Elektronendichte und Temperaturstruktur als bekannt vorausgesetzt, dies ist natürlich nicht so, vielmehr müssen die Dichte- und Temperaturstruktur aus den Gleichungen des hydrostatischen und radiativen Gleichgewichts bestimmt werden. Dies geschieht entweder durch simultane Lösung des Gleichungssystems oder iterativ in getrennten Schritten.

Kapitel 6

Hydrostatisches Gleichgewicht

Die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts beschreibt die Dichtestruktur beziehungsweise die Druckschichtung einer Sternatmosphäre. An einem bestimmten Ort wirken hierbei der Gasdruck und der Strahlungsdruck der Schwerkraft entgegen. Hier tritt wieder ein fundamentaler Unterschied zwischen planparalleler und sphärischer Geometrie auf. Während die Schwerebeschleunigung g in planparalleler Geometrie als konstant über die Tiefe angenommen wird, ist sie im Falle sphärischer Geometrie ausgedehnter Sternatmosphären tiefenabhängig.

6.1 Planparallele Geometrie

Betrachtet man das Plasma als ideales Gas mit der Massendichte ρ, dann gilt für den gravitativen Anteil der Druckschichtung $P(z)$ über die Tiefe z

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

beziehungsweise mit einer Massenskala[1] als Tiefenskala

$$\frac{dP}{dm} = g.$$

Stellt man sich die von der Strahlung verursachte Beschleunigung g_{rad} als absorbierten Impuls pro Zeit- und Masseneinheit des Atoms vor, so gilt

$$g_{rad} = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{\kappa(\nu)}{\rho} H_\nu d\nu.$$

Die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts lautet dann

$$\frac{dP}{dm} = g - \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{\kappa(\nu)}{\rho} H_\nu d\nu.$$

In den äußersten Schichten mancher Sterne kann es sein, daß die Strahlungsbeschleunigung größer ist als die Gravitationsbeschleunigung. Dies führt zu expandierenden Atmosphären, die mit Hilfe der Hydrodynamik beschrieben werden müssen.

[1] Die Säulenmasse m ist definiert durch $m(z) = -\int_0^z \rho dz'$ und hat den Vorteil, proportional zum Gasdruck zu sein.

Dies führt letztendlich zur Stabilitätsgrenze der Sterne, dem sogenannten Eddington-Limit. Verwendet man zur Abschätzung der Strahlungsbeschleunigung nur Elektronenstreuung, so läßt sich aus Strahlungsbeschleunigung und Gravitationsbeschleunigung ein Quotient bilden, der für stabile Sterne kleiner als eins ist:

$$\Gamma_e = \frac{g^e_{rad}}{g} = 10^{-4.51}\, q \,\frac{L/\mathrm{L}_\odot}{M/\mathrm{M}_\odot}.$$

q gibt hierbei die Zahl der freien Elektronen pro atomarer Masseneinheit an. Für eine vollständig ionisierte reine Wasserstoffatmosphäre ist $q = 1$, für eine vollständig ionisierte reine Heliumatmosphäre ist $q = 0.5$. Für eine vorgegebene Masse M gibt es also eine maximale Leuchtkraft L, oberhalb derer keine stabilen Sterne existieren ($\Gamma_e > 1$). Mit Hilfe der Effektivtemperatur T_{eff} und der Schwerebeschleunigung g läßt sich das Eddington-Limit schreiben als

$$\Gamma_e = 10^{-15.12}\, q\, {T_{\mathrm{eff}}}^4/g = 1.$$

Im $\log T_{\mathrm{eff}}$-$\log\, g$-Diagramm läßt es sich dann als eine Gerade darstellen, siehe hierzu Abbildung 9.1.

6.2 Sphärische Geometrie

Im Falle sphärischer Geometrie ist, wie erwähnt, die Schwerebeschleunigung tiefenabhängig. Wie im planparallelen Fall wird wieder die Säulenmasse als unabhängige Variable gewählt, allerdings jetzt etwas anders definiert:

$$dm = -\rho \frac{R^2}{r^2} dr$$

wobei R der Sternradius bei der Rosselandschen optischen Tiefe $\tau=\frac{2}{3}$ ist. Die Rosselandsche Tiefenskala beruht auf frequenzunabhängigen, gemittelten Opazitäten (Rosseland, 1924), die die Flußkonstanz beim Übergang von grauer, das heißt frequenzunabhängiger, zu nichtgrauer Atmosphäre garantieren. Die Mittelung der Opazitäten (Unsöld, 1955) erfolgt gemäß

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\pi}{4\sigma T^3} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu.$$

Für die Rosselandsche optische Tiefe ergibt sich dann

$$\tau_{Ross}(r) = \bar{\tau}(r) = -\int\limits_\infty^r \bar{\kappa}\, dr'.$$

Nach Milne u.a. erhält man für eine derartige sogenannte graue Atmosphäre als Lösung der Strahlungstransportgleichung und für den im Strahlungsgleichgewicht gültigen Energiesatz, der besagt, daß der Gesamtstrahlungsstrom F_ν unabhängig von der Tiefe sein soll, also

$$F = \frac{\sigma}{\pi} {T_{\mathrm{eff}}}^4$$

in guter Näherung die Temperaturverteilung

$$T^4(\bar{\tau}) = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}{}^4 (\bar{\tau} + \frac{2}{3}).$$

Die Effektivtemperatur T_{eff} ist demnach realisiert in einer optischen Tiefe $\tau_{Ross} = \bar{\tau} = \frac{2}{3}$. Man kann die Tiefe $\tau_{Ross} = \frac{2}{3}$ also gewissermasen als die Oberfläche des Sterns auffassen, weshalb die Parameter T_{eff} und Sternradius R (und damit auch $\log\ g$) eben für diese Tiefe definiert werden.

Damit schreibt sich nun die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts in sphärischer Geometrie unter Benutzung des ersten Moments des Strahlungsfeldes

$$\frac{dP}{dm} = \frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{1}{q_\nu r^2} \frac{d(q_\nu f_\nu r^2 J_\nu)}{dm} d\nu.$$

q_ν ist hierbei der Sphärizitätsfaktor, der bei der Behandlung des Strahlungstransports bereits definiert wurde. Um die Gleichung zu lösen, wird noch eine obere Randbedingung benötigt, die hier ohne Herleitung angegeben ist (Kubat, 1996):

$$\frac{p_1}{m_1} = \frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi}{c} \frac{r_1}{R} \int_0^\infty \frac{\kappa_{1\nu}}{\rho_1} (g_{1\nu} J_{1\nu} - H_\nu^-) d\nu$$

wobei $g_{1\nu} = \int_0^1 \mu\, j_{1\nu\mu} d\mu / J_{1\mu}$ und H_ν^- der einfallende Fluß ist (in unserem Fall ohne Einstrahlung, also $H_\nu^- = 0$). Die Indizes „1“ bezeichnen die physikalischen Größen am äußersten Punkt der Modellatmosphäre.

6.3 Bestimmung der Elektronendichte

Mit der hydrostatischen Gleichung kann also der Gasdruck P und deshalb über $P = NkT$ auch die Gesamtteilchendichte N bestimmt werden. Für die Berechnung der Besetzungszahlen wird allerdings die Elektronendichte n_e benötigt. Da Sternatmosphären elektrisch neutral sind, muß die Ladungsdichte der Elektronen aufgrund der Ladungserhaltung gleich der Ladungsdichte der Ionen sein,

$$n_e = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=0}^{j_k} j N_{jk}$$

wobei j_k die Zahl der Ionisationstufen des Elements k bezeichnet; j=0 steht dabei für das neutrale Atom, das keinen Beitrag leistet, j=1 bedeutet einfach ionisiert usw.

Kapitel 7

Radiatives Gleichgewicht

In Sternatmosphären findet im allgemeinen keine Energieerzeugung statt, es wird lediglich Energie aus dem Sterninneren nach außen transportiert. Dies kann im Wesentlichen auf zwei unterschiedliche Arten geschehen, entweder durch Konvektion oder durch Strahlung. Die in dieser Arbeit untersuchten Sterne sind heiße O-Sterne. Bei Sternen vom Spektraltyp F5 oder früher erfolgt der Energietransport vorwiegend über Strahlung, ihre Atmosphäre befindet sich im sogenannten Strahlungsgleichgewicht.

Für jede Tiefe kann nun Strahlungsgleichgewicht gefordert werden derart, daß die absorbierte Energie eines Volumenelements gleich der emittierten Energie ist, integriert über alle Frequenzen. Alternativ läßt sich das radiative Gleichgewicht auch als Konstanz des totalen Flusses in jeder Tiefe schreiben. Aufgrund ihrer Darstellung werden die beiden Formulierungen auch als integrale und differentielle Form des Strahlungsgleichgewichts bezeichnet. Da die integrale Form in kleinen Tiefen, die differentielle Form in großen Tiefen numerisch besser geeignet ist (Hubeny, 1988), wird meist eine Linearkombination beider Formulierungen verwendet. Die Bedeutung des radiativen Gleichgewichts liegt in der Festlegung der Temperaturschichtung der Sternatmosphäre.

Wie schon bei der hydrostatischen Gleichung, weichen auch hier die Gleichungen in planparalleler und sphärischer Geometrie voneinander ab.

7.1 Planparallele Geometrie

Für die pro cm^2 und Sekunde absorbierte Energie gilt

$$E_{abs} = \oint_{4\pi} d\omega \int_0^\infty \kappa(\nu) I_\nu d\nu,$$

für die emittierte Energie gilt

$$E_{em} = \oint_{4\pi} d\omega \int_0^\infty \eta_\nu d\nu.$$

Über den Raumwinkel $d\omega$ integriert ergibt sich dann

$$\int_0^\infty \kappa(\nu)(J_\nu - S_\nu) d\nu = 0.$$

Diese Gleichung wird als die integrale Form des radiativen Gleichgewichts bezeichnet.
Nach dem nullten Moment der Strahlungstransportgleichung gilt für den Eddingtonfluß

$$\frac{d}{dt}H_\nu = \kappa(\nu)(J_\nu - S_\nu).$$

Integriert man nun über die Frequenz und vertauscht Differentiation mit Integration, dann ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty H_\nu d\nu = \int_0^\infty \kappa(\nu)(J_\nu - S_\nu)d\nu.$$

Die rechte Seite ist laut integraler Form des Strahlungsgleichgewichts gleich null, so daß

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty H_\nu d\nu = 0$$

der totale Fluß ist also in jeder Tiefe gleich, nämlich

$$\int_0^\infty H_\nu d\nu = \frac{\sigma}{4\pi}{T_{\mathrm{eff}}}^4.$$

Mit dem zweiten Moment der Strahlungstransportgleichung und der Definition der Eddingtonfaktoren läßt sich dies schreiben als

$$H = \int_0^\infty \frac{d}{d\tau}(f_\nu J_\nu)d\nu = \frac{\sigma}{4\pi}{T_{\mathrm{eff}}}^4.$$

Diese Gleichung wird als die differentielle Form des radiativen Gleichgewichts bezeichnet.

7.2 Sphärische Geometrie

Die integrale Form des radiativen Gleichgewichts ist in planparalleler und sphärischer Geometrie identisch, lediglich die differentielle Form weicht von der planparallelen Formulierung ab.
Im sphärischen Fall ist der totale Fluß abhängig vom Radius

$$H(r) = \frac{L}{(4\pi r)^2}.$$

Mit Hilfe des Sphärizitätsfaktors q_ν und dem ersten Moment der Strahlungstransportgleichung läßt sich der totale Fluß dann schreiben als

$$H(r) = \int_0^\infty H_\nu d\nu = -\int_0^\infty \frac{1}{q_\nu \kappa(\nu) r^2}\frac{d(q_\nu f_\nu r^2 J_\nu)}{dr}d\nu.$$

Für das radiative Gleichgewicht ergibt sich somit

$$-\int_0^\infty \frac{1}{q_\nu \kappa(\nu)}\frac{d(q_\nu f_\nu r^2 J_\nu)}{dr}d\nu = \frac{L}{(4\pi)^2}.$$

7.3 Unsöld-Lucy-Verfahren

Bei Modellen, die sich als numerisch instabil erweisen, ist es unter Umständen von Vorteil, die Korrektur der Temperatur von den statistischen Gleichungen zu entkoppeln und für jeden Tiefenpunkt eine Temperaturkorrektur zu berechnen, um Flußkonstanz zu erreichen. Details zu diesem Verfahren finden sich in Werner & Dreizler (1999). Um es an sphärische Geometrie anzupassen, ist es zum einen nötig, die Größen H, J und B mit r^2 zu skalieren, wie schon im Falle der Momentengleichung, zum anderen ist zu beachten, daß der totale Fluß, wie oben erwähnt, vom Radius abhängig ist.
Für den totalen Fluß gilt

$$H(r) = \frac{L}{(4\pi r)^2}.$$

Für das über ν integrierte nullte Moment ergibt sich

$$\frac{d\tilde{H}}{d\tau} = \frac{\bar{\kappa}_J}{\bar{\kappa}_p}\tilde{J} - \tilde{B}$$

und für das erste Moment

$$\frac{d(\bar{f}\tilde{J})}{d\tau} = \frac{\bar{\kappa}_H}{\bar{\kappa}_p}\tilde{H}.$$

Hierbei sind

$$\bar{\kappa}_J = \frac{1}{\tilde{J}}\int(\chi_\nu - \gamma_\nu)\tilde{J}_\nu d\nu,$$

wobei hier χ_ν die Opazität mit Thomsonstreuung, κ_ν die Opazität ohne Thomsonstreuung ist, und γ_ν definiert ist durch

$$\gamma_\nu = \frac{\chi_\nu \tilde{S}_\nu - \kappa_\nu^B \tilde{B}_\nu}{\tilde{J}_\nu}.$$

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}_p &= \frac{1}{\tilde{B}}\int \kappa_\nu^B \tilde{B}_\nu d\nu \\
\bar{\kappa}_S &= \frac{1}{\tilde{S}}\int \kappa_\nu^S \tilde{S}_\nu d\nu \\
\bar{\kappa}_H &= \frac{1}{\tilde{H}}\int q_\nu \chi_\nu \tilde{H}_\nu d\nu \\
\bar{f} &= \frac{1}{\tilde{J}}\int q_\nu f_\nu \tilde{J}_\nu d\nu \\
\bar{h} &= \frac{1}{\tilde{J}}\int q_\nu h_\nu \tilde{J}_\nu d\nu.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Temperaturkorrektur

$$\Delta T = \frac{\pi}{4\sigma T^3}\frac{1}{\bar{\kappa}_P}\left[\bar{\kappa}_J J - \bar{\kappa}_S S + \frac{\bar{\kappa}_J}{\bar{f}}\left(\int_0^m \frac{\bar{\kappa}_H}{\rho}\Delta H\, dm' + \frac{\Delta H(0)\bar{f}(0)}{\bar{h}(0)}\right)\right].$$

Kapitel 8

Berechnung von Modellatmosphären

In den vorhergehenden Kapiteln wurden die Grundgleichungen, die man zur Modellierung von Sternatmosphären benötigt, im einzelnen beschrieben. In diesem Kapitel werden sie nun miteinander in Zusammenhang gebracht; es wird gezeigt, wie die Berechnung von sphärischen Modellatmosphären vor sich geht, bevor dann im letzten Teil die erzielten Ergebnisse verschiedener Modellrechnungen vorgestellt werden. Dies soll jedoch kein detaillierter Einblick in die Tiefen des Programms sein, sondern nur einen Überblick geben.

Um ein Sternatmosphärenmodell zu berechnen, müssen Atomdaten der zu verwendenden Elemente, das zu diesen Daten gehörige Frequenzgitter sowie die Inputparameter log g, T_{eff}, M und chemische Zusammensetzung vorgegeben werden. Die Tiefenabhängigkeit der Oberflächenschwerebeschleunigung g macht es notwendig, genau festzulegen, für welchen Ort in der Atmosphäre log g vorgegeben wird. Da sowohl Effektivtemperatur als auch Sternradius für die optische Tiefe $\tau_{Ross} = 2/3$ definiert sind, ist es nur konsequent, auch log g für die Tiefe $\tau_{Ross} = 2/3$ vorzugeben. Desweiteren wird ein Startmodell benötigt, z.B. ein LTE-, ein planparalleles NLTE- oder ein sphärisches NLTE-Modell mit zugehörigem Strahlungsfeld und Eddingtonfaktoren.

Als erstes wird nun die Sterngeometrie bestimmt (siehe Anhang A) und das Winkelgitter für die μ-Integration berechnet. Sind die Eddingtonfaktoren bekannt, werden aus ihnen die Sphärizitätsfaktoren $q_\nu(r)$ berechnet, ansonsten werden sie aus zunächst genäherten Eddingtonfaktoren bestimmt. Als nächstes folgen Opazitäten, Emissivitäten und Quellfunktion, wobei hier das Plancksche Strahlungsfeld eingeht, falls noch kein Strahlungsfeld bekannt ist. Nun wird der Strahlungstransport gelöst. Aus der ray-by-ray-Lösung gewinnt man neue Eddingtonfaktoren und Sphärizitätsfaktoren, aus der Momentengleichung dann das neue Strahlungsfeld. Mit den bisher bestimmten Größen wird jetzt das Gleichungssystem, bestehend aus hydrostatischem und radiativem Gleichgewicht, Teilchenzahlerhaltung und statistischen Gleichungen, konsistent gelöst und so die Änderungen in der Gesamtteilchendichte ΔN, in der Temperatur ΔT, der Elektronendichte Δn_e und den Besetzungszahlen Δn_i bestimmt. Alternativ können die hydrostatische Gleichung und die Gleichung des radiativen Gleichgewichts auch aus dem Gleichungsschema herausgenommen und im Anschluß daran separat gelöst werden. Sind alle relativen Änderungen kleiner als das gewählte Konvergenzkriterium ($\frac{\Delta x}{x} = 10^{-4}$), dann wird das Modell als fertig betrachtet und zusammen mit dem Strahlungsfeld, den Eddingtonfaktoren und dem maximalen Sternradius gespeichert. Das Speichern des Sternradius erlaubt die Berechnung einer Modellreihe bei festgehaltener Geometrie, wohingegen das Speichern des Strahlungsfeldes und der Eddingtonfaktoren den Konvergenzprozeß bei Weiterverwendung als Startmodell für eine neue Berechnung erleichtert. Ist das Modell noch nicht konvergent, werden die berechneten Änderungen angebracht und der Zyklus beginnt mit der Bestimmung der Sterngeometrie von neuem.

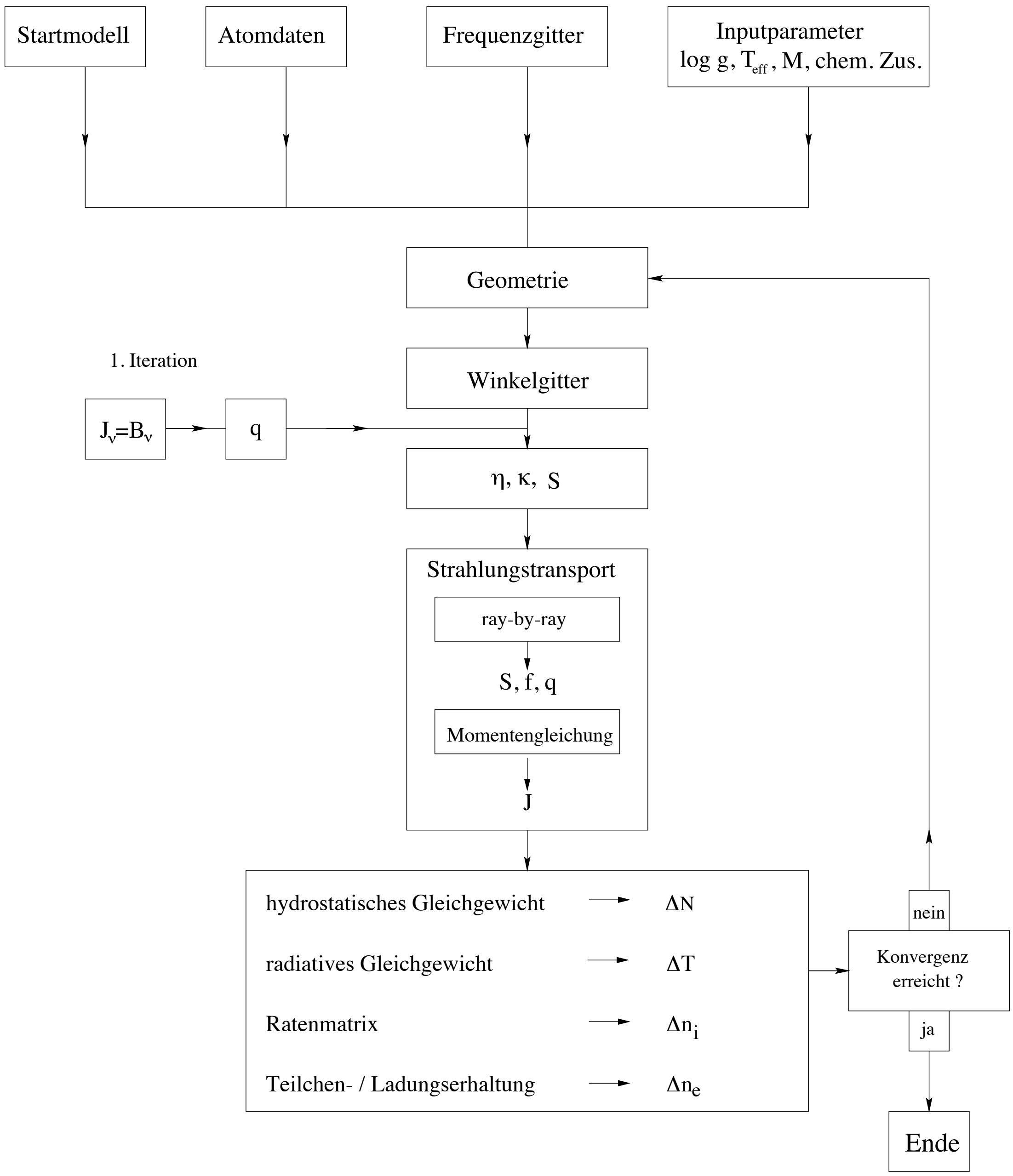

Abbildung 8.1: Schematische Darstellung des Programmablaufs

Teil III

Modell-Rechnungen

Kapitel 9

Modellgitter um einen theoretischen Sternentwicklungsweg

Bei der Berechnung ausgedehnter Sternatmosphären mit planparalleler Geometrie handelt man sich aufgrund der Vernachlässigung von Sphärizitätseffekten systematische Fehler ein. Um einschätzen zu können, wie groß diese sind, wurde ein Modellgitter von Wasserstoff-Helium-Atmosphären in solarer Zusammensetzung berechnet, ausgehend vom Entwicklungsweg eines Post-AGB-Sterns mit einer Masse von $0.605\,M_{\odot}$. Hierzu wurde bei Temperaturen von 60 000 K bis 140 000 K jeweils ein Stern mit einer dem Punkt auf dem Entwicklungsweg entsprechenden Oberflächenschwerebeschleunigung sowie zwei weitere mit geringeren Oberflächenschwerebeschleunigungen simuliert. Bei 80 000 K wurde außer dem Stern auf dem Entwicklungsweg nur ein weiterer mit kleinerer Oberflächenschwerebeschleunigung berechnet, bei 60 000 K nur der Stern auf dem Entwicklungsweg. Alle Modelle wurden sowohl in planparalleler als auch in sphärischer Geometrie berechnet, außerdem wurde davon ausgegangen, daß die vorgegebene Effektivtemperatur und Oberflächenschwerebeschleunigung bei einer Rosselandschen Tiefe von $\tau_{Ross} = \frac{2}{3}$ gültig sind.

Abbildung 9.1 zeigt in einem $\log g$-$\log T_{\rm eff}$-Diagramm den Entwicklungsweg des Post-AGB-Sterns sowie die gerechneten Modelle. Gestrichelt eingezeichnet ist das Eddington-Limit für Atmosphären mit solarem He/H-Verhältnis.

In Tabelle 9.1 und Taballe 9.2 sind alle berechneten Modelle, auch diejenigen der folgenden Kapitel, zusammengestellt. Um ein Maß für die Ausdehung der Sternatmosphären zu haben, wurde die Größe Sphärizität als das Verhältnis aus Atmosphärendicke und Sternradius definiert. Bei der Bestimmung der Dicke der Atmosphäre wird dabei nur derjenige Bereich der Atmosphäre berücksichtigt, in welchem sich die logarithmische Massenskala zwischen 0 und -5 bewegt. Dieser Bereich entspricht in etwa der Entstehungstiefe des Sternspektrums.

Zu den verwendeten Modellatomen sollen hier folgende kurze Angaben genügen. Wasserstoff und Helium werden mit jeweils 11, 29, 16 NLTE-Niveaus für H I ,He I, He II repräsentiert. Die *CNO*-Elemente werden durch umfangreiche Modellatome dargestellt, wie sie z.B. in einer detaillierten Untersuchung von Werner (1996) ausgetestet wurden.

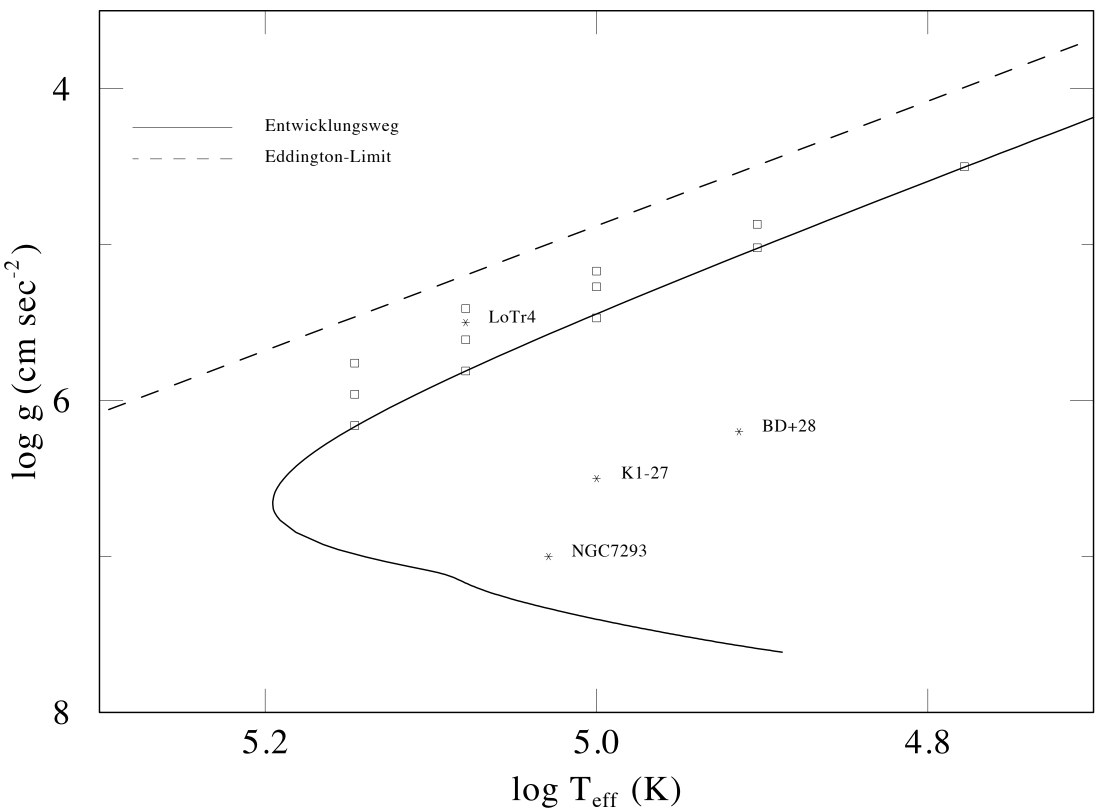

Abbildung 9.1: Entwicklungsweg (durchgezogene Linie) eines 0.605 $M_\odot$-Sterns und das Eddington-Limit (gestrichelte Linie) für solare He/H-Häufigkeiten im log g-logT_{eff}-Diagramm. Eingezeichnet sind als Quadrate die berechneten Modelle des Gitters und als Sternsymbole die Zentralsterne von K1-27, LoTr4 und NGC 7293 sowie BD+28°4211

.

T_{eff}/kK	log g (cgs)	He/H	M/$\mathrm{M}_{\odot}$	R/$\mathrm{R}_{\odot}$	D/km	S
60	4.50	0.1	0.605	0.724	35618	0.071
80	4.87	0.1	0.605	0.473	23685	0.072
80	5.02	0.1	0.605	0.397	13760	0.048
100	5.17	0.1	0.605	0.335	17332	0.074
100	5.27	0.1	0.605	0.298	11955	0.058
100	5.47	0.1	0.605	0.236	6093	0.037
120	5.41	0.1	0.605	0.254	12719	0.072
120	5.61	0.1	0.605	0.202	5850	0.042
120	5.81	0.1	0.605	0.159	3081	0.028
140	5.76	0.1	0.605	0.170	5268	0.045
140	5.96	0.1	0.605	0.135	2660	0.028
140	6.16	0.1	0.605	0.107	1495	0.020
140	6.16	0.1	1000	4.360	1512	0.0005

Tabelle 9.1: Übersicht der berechneten Gittermodelle. T_{eff}, log g und Sternradius sind auf die Tiefe $\tau_{Ross} = \frac{2}{3}$ bezogen. D gibt hierbei die Dicke der Atmosphäre für den Bereich von 0 bis -5 bezüglich der log m - Skala in Kilometern an, S ist ein Maß für die Sphärizität des Sterns, berechnet als Verhältnis der Dicke der Atmosphäre zum Sternradius.

Name	T_{eff}/kK	log g (cgs)	He/H	M/$\mathrm{M}_{\odot}$	R/$\mathrm{R}_{\odot}$	D/km	S
K1-27	100	6.50	5.00	0.520	0.067	368	0.008
LoTr4	120	5.50	2.00	0.650	0.237	5803	0.035
BD+28°4211	82	6.20	0.10	0.530	0.096	568	0.009
NGC 7293	107	7.00	0.05	0.580	0.040	131	0.005

Tabelle 9.2: Übersicht der berechneten Modellatmosphären für konkrete Sterne. T_{eff}, log g und Sternradius sind auf die Tiefe $\tau_{Ross} = \frac{2}{3}$ bezogen. D gibt hierbei die Dicke der Atmosphäre für den Bereich von 0 bis -5 bezüglich der log m - Skala in Kilometern an, S ist ein Maß für die Sphärizität des Sterns, berechnet als Verhältnis der Dicke der Atmosphäre zum Sternradius.

9.1 Quasi-Planparallele Atmosphärenmodelle

Die berechneten planparallelen und sphärischen Modelle wurden jeweils mit an die Geometrie angepasstem Programmcode gerechnet. Die planparallelen Modelle mit dem bereits existierenden Code für planparallele Geometrie, die sphärischen mit dem auf sphärisch-symmetrische Geometrie erweiterten Code. Es stellte sich deshalb die Frage, inwieweit die Unterschiede der berechneten Modelle auf Sphärizitätseffekte zurückzuführen sind oder es sich um numerische Effekte aufgrund der unterschiedlichen Implementierung handelt.

Um dies herauszufinden, wurde mithilfe des sphärisch-symmetrischen Programmcodes ein Sternmodell berechnet, dessen Atmosphäre als geometrisch sehr dünn und deshalb in guter Näherung als planparallel angesehen werden konnte. Bei dem Modellstern handelt es sich um einen Stern solarer Häufigkeitsmischung He/H mit einer Effektivtemperatur von $T_{\rm eff}$ =140 000 K, einem log g =6.15 und M=1000 $M_{\odot}$. Aufgrund der extrem hohen Masse beträgt die Dicke der Atmosphäre nur 0.05 Prozent des Gesamtradius des Sterns. Dies hat zur Folge, daß die Tiefenabhängigkeit der Schwerebeschleunigung innerhalb der Atmosphäre vernachlässigbar klein ist. So variiert die Schwerebeschleunigung von der äußersten Schicht bis zur innersten in log g um nur 0.001, was einem Faktor 1.002 in g entspricht. Infolge der sehr dünnen Atmosphäre ist es allerdings nötig, die Anzahl der core-rays von hundert auf tausend zu erhöhen, um Ungenauigkeiten bei der Winkelintegration zu vermeiden (siehe Anhang A). Dieses Modell wurde mit einem Modell mit gleicher Elementkomposition, $T_{\rm eff}$ und gleichem log g, das mit Hilfe des planparallelen Programmcodes berechnet wurde, verglichen.

Es zeigt sich, daß die Linienprofile, die Kontinuumsflüsse und weitgehend auch die Temperaturschichtung nahezu identisch sind (siehe Abbildung 9.2 und Abbildung 9.3). Der Fluß des planparallelen Modells wurde hierbei mit einem Faktor R^2/r_1^2 skaliert, wobei R der Sternradius, definiert bei $\tau_{Ross} = 2/3$, und r_1 der maximale Radius des sphärischen Sternmodells sind. Diese Skalierung ist erforderlich, um der r^{-2}-Abhängigkeit des stellaren Flusses in sphärischer Geometrie Rechnung zu tragen und so die Flüsse beider Modelle vergleichen zu können. Dies wird auch in den folgenden Kapiteln so verwendet. Bei den Effekten, die in den berechneten Modellen ausgedehnter Sternatmosphären auftreten, handelt es sich also tatsächlich um Sphärizitätseffekte und nicht um numerische Artefakte.

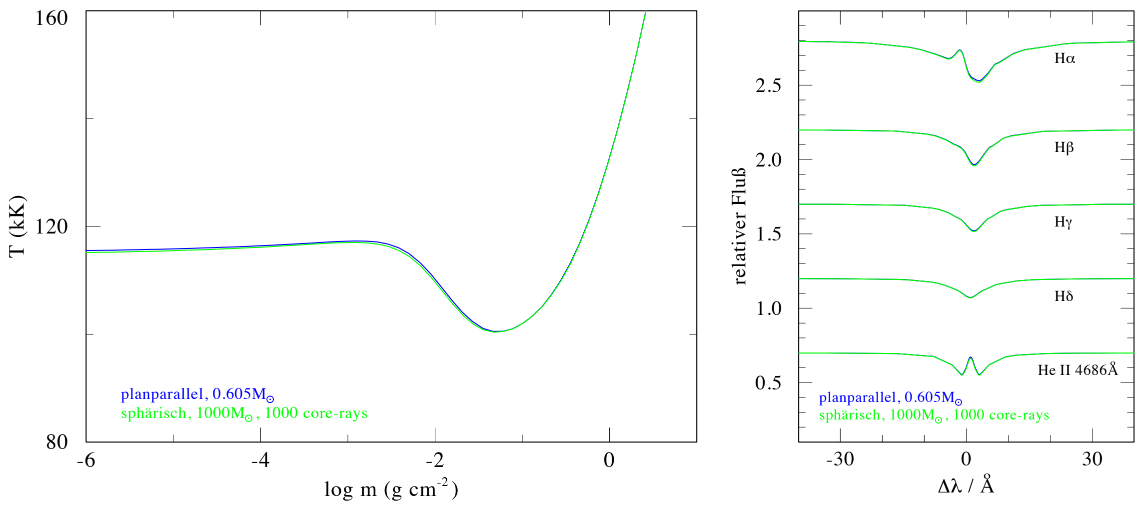

Abbildung 9.2: Vergleich eines planparallel und eines sphärisch gerechneten quasi-planparallelen Modells. Beide Modelle wurden jeweils mit einer Effektivtemperatur von $T_{\rm eff} = 140\,000$ K, einem log g = 6.16 und solaren Häufigkeiten berechnet. Für das quasiplanparallele Modell wurde dabei eine Masse von 1000 $M_{\odot}$ angenommen.

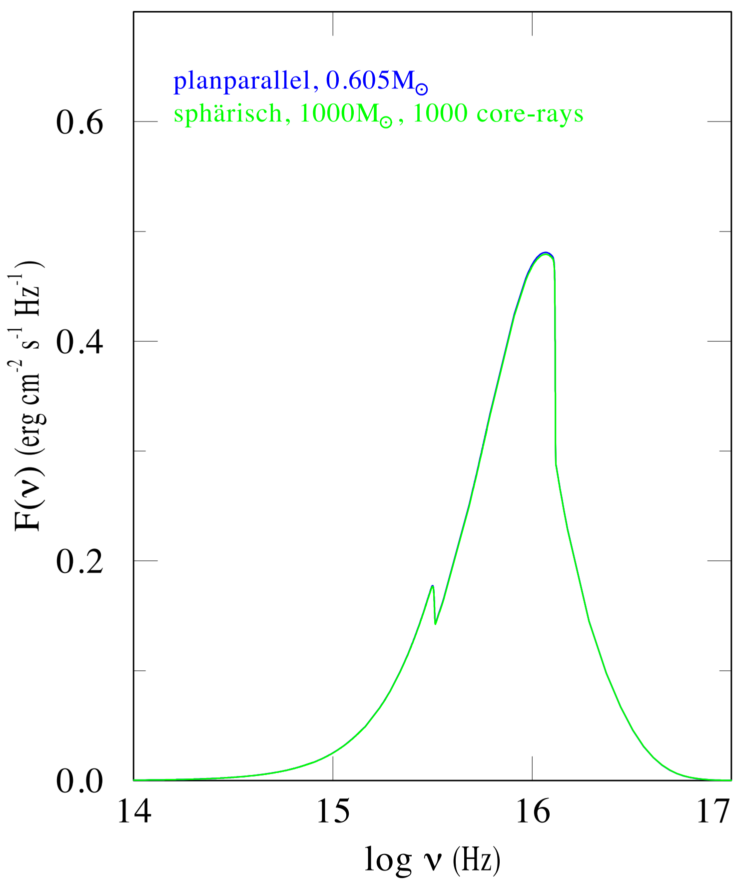

Abbildung 9.3: Vergleich der Kontinuumsflüsse des planparallelen und des sphärisch gerechneten quasi-planparallelen Modells. Beide Modelle wurden mit $T_{\mathrm{eff}} = 140\,000\,\mathrm{K}$, $\log g = 6.16$ und solaren Häufigkeiten berechnet. Für das quasiplanparallele Modell wurde dabei eine Masse von $1000\,M_{\odot}$ angenommen.

9.2 Sphärisch-symmetrische Atmosphärenmodelle

9.2.1 Vergleich mit Rechnungen anderer Autoren

Beim Vergleich unserer Ergebnisse mit Veröffentlichungen anderer Autoren fällt auf, daß die Sphärizitätseffekte in unseren Modellen stärker ausgeprägt sind. Dies ist sowohl bei Kubats Modellen aus Kapitel 10 als auch bei Modellen von Gruschinske & Kudritzki (1979) der Fall. Es zeigt sich insbesondere, daß die von uns berechneten Änderungen in den Linienprofilen stärker sind. Der Grund hierfür konnte noch nicht aufgeklärt werden. Es bedarf hier noch einer Reihe von Untersuchungen, die jedoch nicht mehr im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt werden konnten. In Anbetracht dieser Diskrepanzen sollten die folgenden quantitativen Aussagen mit Vorsicht betrachtet werden.

9.2.2 Vergleich der Linienprofile

Auf den folgenden Seiten werden die relativen Flüsse, gerechnet in planparalleler und sphärischer Geometrie, für die Spektrallinien $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ und $H\delta$ des Wasserstoffs sowie für die He II Linie bei 4686 Å miteinander verglichen. Die Linienprofile für Wasserstoff und He II wurden hierbei in sehr guter Näherung nach einem Verfahren, das auf Unsöld (1968, Gleichung 82.23b) zurückgeht, berechnet. Hierbei wird der Absorptionsquerschnitt für den Stark-Flügel einer Linie nach der statistischen Theorie von Holtsmark für die Druckverbreiterung berechnet. Das genaue Vorgehen wird in Werner et al. (1991) dargestellt. Die resultierenden Profile sind sehr gute Annäherungen an die nach der VCS-Theorie (Vidal et al., 1973) berechneten Profile (die aber noch nicht in den sphärischen Programmcode integriert sind).

Die Abbildungen 9.5 bis 9.8 zeigen, daß grundsätzlich die Linien des sphärischen Modells tiefer eingesenkt sind als diejenigen des entsprechenden planparallelen Modells. Bei konstanter Effektivtemperatur verstärkt sich dieser Effekt mit kleiner werdender Oberflächenschwerebeschleunigung, also kleinerem log g. Dies läßt sich leicht verstehen, da ein kleineres log g bei gleicher Temperatur eine ausgedehntere Atmosphäre bedeutet und somit Sphärizitätseffekte stärker zum tragen kommen.

Um einen Eindruck von den in den planparallelen Modellen auftretenden systematischen Fehlern zu bekommen, wurde versucht, exemplarisch in zwei Fällen die Linienprofile der sphärischen Modelle durch solche von planparallelen Modellen anzupassen. Abbildung 9.9 zeigt dies für ein sphärisches Modell mit einer Effektivtemperatur von $T_{\rm eff} = 140\,000$ K, einer Schwerebeschleunigung von log $g = 6.16$ und solarer He/H-Häufigkeit. Vergleicht man dieses mit einem planparallelen Modell gleicher Effektivtemperatur, aber einer geringeren Schwerebeschleunigung von log $g = 5.76$, ergibt sich in $H\alpha$ und $H\beta$ bereits eine recht gute Übereinstimmung, nicht jedoch in den anderen Linien. Dies deutet darauf hin, daß die Oberflächenschwerebeschleunigung in den planparallelen Modellatmosphären unterschätzt wird. Vergleicht man ein sphärisches Modell mit $T_{\rm eff} = 120\,000$ K und log $g = 5.81$ mit einem planparallelen Modell mit $T_{\rm eff} = 140\,000$ K und log $g = 5.81$, so sind die Linien im sphärischen Modell tiefer eingesenkt bei gleichem log g, allerdings nicht so stark wie bei gleicher Temperatur und kleinerem log g. Die beste Anpassung des planparallelen Modells an das sphärische mit $T_{\rm eff} = 140\,000$ K und log $g = 6.16$ gelang mit einem planparallelen Modell bei $T_{\rm eff} = 135\,000$ K und log $g = 5.86$.

In Abbildung 9.10 sind einem sphärischen Modell mit $T_{\rm eff} = 100\,000$ K und log $g = 5.47$ zwei planparallele Modelle mit $T_{\rm eff} = 105\,000$ K und log $g = 5.17$ beziehungsweise mit $T_{\rm eff} = 95\,000$ K und log $g = 5.17$ gegenübergestellt. Hierbei paßt das planparallele Modell mit $T_{\rm eff} = 105\,000$ K am besten zum sphärischen Modell. Dies würde wieder bedeuten, daß die Schwerebeschleunigung in den planparallelen Modellen unterschätzt wird. Die Temperatur würde allerdings im Gegensatz zu oben überschätzt werden. In der Heliumhäufigkeit besteht dagegen weiterhin ein deutlicher Unterschied zwischen den planparallelen und sphärischen Modellen, der nicht zu vernachlässigen ist. Da dieser Unterschied trotz relativ guter Übereinstimmung in den Balmerlinien besteht, bedeutet dies, daß die Heliumhäufigkeit im planparallelen Modell unterschätzt wird und nach oben korrigiert werden muß. Beim 140 000 K-Modell ist allerdings eine derartige Diskrepanz in den Heliumhäufigkeiten nicht zu bemerken.

Insgesamt läßt sich sagen, daß bei der Berechnung ausgedehnter Sternatmosphären mit Hilfe eines planparallelen Codes systematische Fehler gemacht werden, wobei das Hauptgewicht der Unterschätzung der Oberflächenschwerebeschleunigung zufällt. In den obigen Beispielen war $\log g$ im Bereich von 5.8 bis 6.2 im planparallelen Fall um 0.3 kleiner als im sphärischen Fall. Die Unsicherheit bei der $\log g$-Bestimmung durch Vergleich eines Modells mit einer Beobachtung ist in diesem $\log g$-Bereich oftmals kleiner als 0.3, so daß der Unterschied zwischen den planparallelen und sphärisch-symmetrischen Modellen nicht zu vernachlässigen ist. Der Fehler bezüglich der Temperaturbestimmung fällt dagegen recht moderat aus und liegt im Rahmen der schon bestehenden Unsicherheiten bei der Bestimmung durch Vergleich von Modell und Beobachtung. Da also der Fehler in $\log g$ größer als derjenige der Effektivtemperatur ist, ergibt sich beim Übergang von planparallelen Modellen zu sphärisch-symmetrischen im $\log g$-$\log T_{\rm eff}$-Diagramm eine Verschiebung im wesentlichen in Richtung der $\log g$-Achsen mit kleineren Korrekturen in Richtung der $T_{\rm eff}$-Achse. Dies hat Auswirkungen auf die Massenbestimmung der Objekte, die Masse wird mit planparallelen Modellen überschätzt. Um dies zu veranschaulichen, sind in Abbildung 9.4 die Entwicklungswege von vier Zentralsternen unterschiedlicher Masse sowie die Modelle aus Abbildung 9.9 (unten) und 9.10 eingezeichnet.

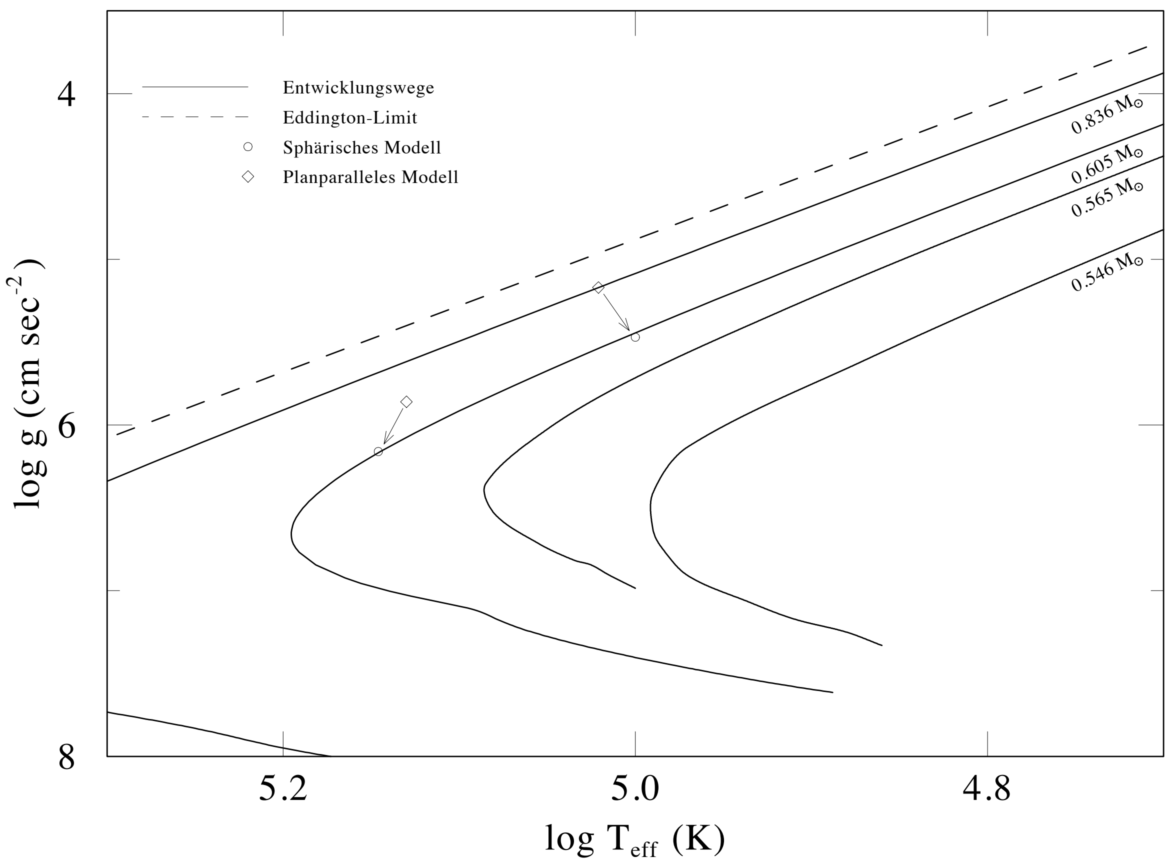

Abbildung 9.4: Entwicklungswege von Zentralsternen unterschiedlicher Massen. Als Kreissymbol eingezeichnet ist das sphärisches Modell mit $T_{\rm eff}$ =140 000 K und log g =6.16 sowie als Quadrat das an dieses angepaßte planparallele Modell mit $T_{\rm eff}$ =135 000 K und log g =5.86. Der Pfeil entspricht der Korrektur in $T_{\rm eff}$ und g, die bei einer Spektralanalyse mit planparallelen Modellen angebracht werden muß, um den Sphärizitätseffekten gerecht zu werden.

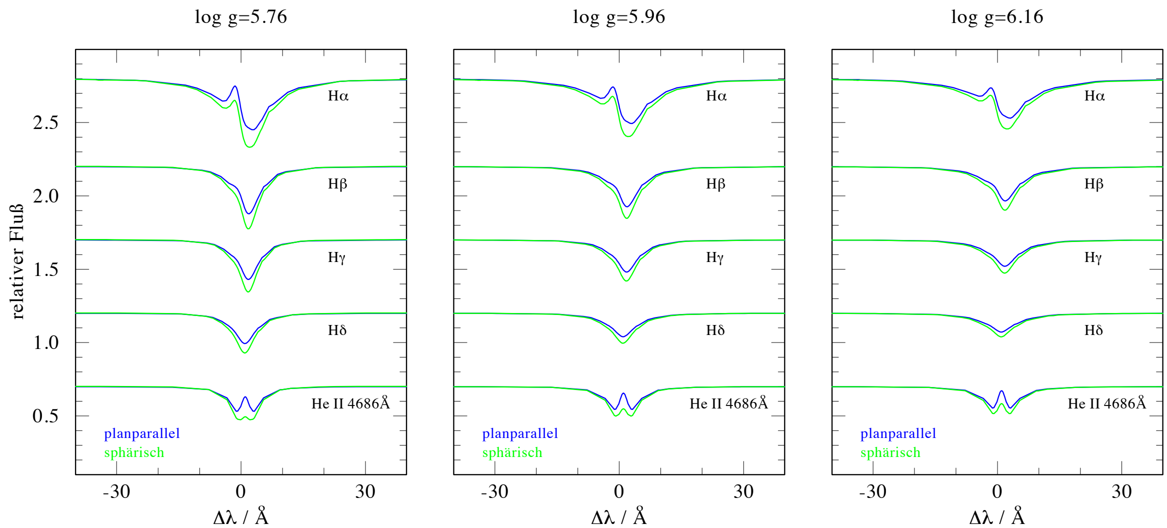

Abbildung 9.5: Vergleich der Linienprofile bei $T_{\mathrm{eff}} = 140\,000$K

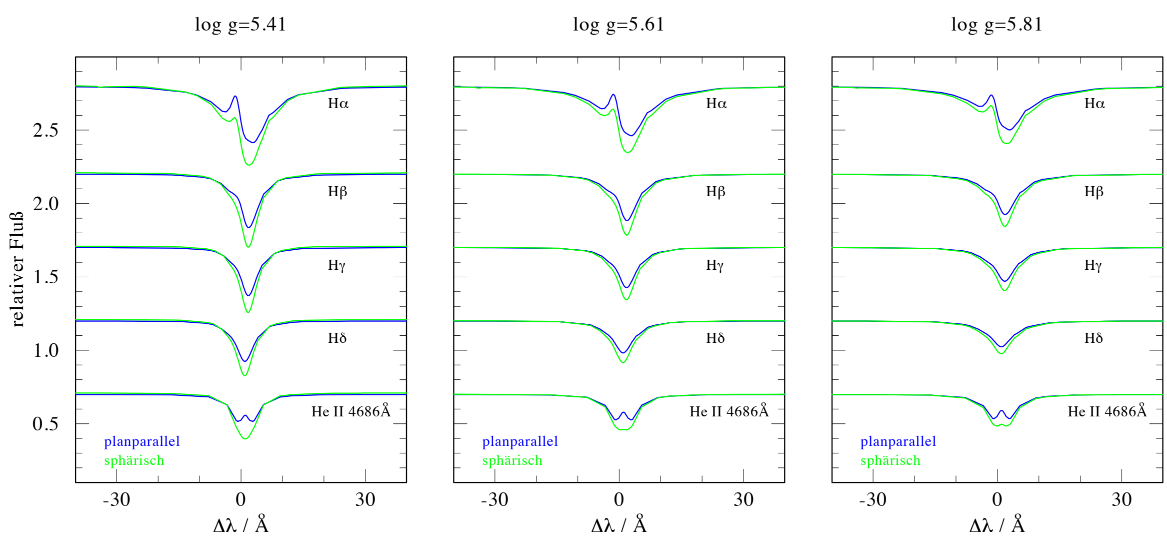

Abbildung 9.6: Vergleich der Linienprofile bei $T_{\mathrm{eff}} = 120\,000$K

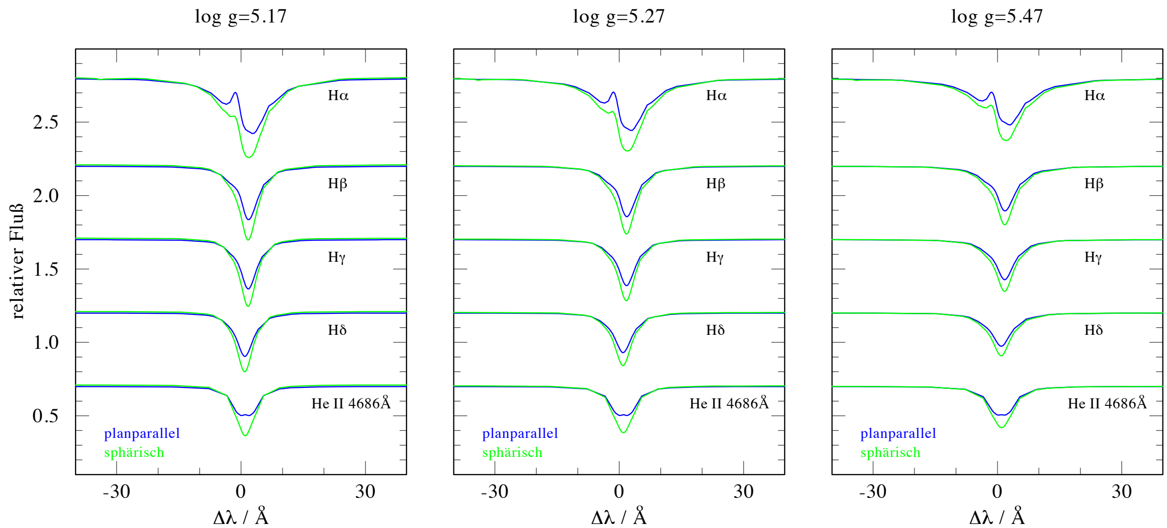

Abbildung 9.7: Vergleich der Linienprofile bei $T_{\rm eff} = 100\,000$K

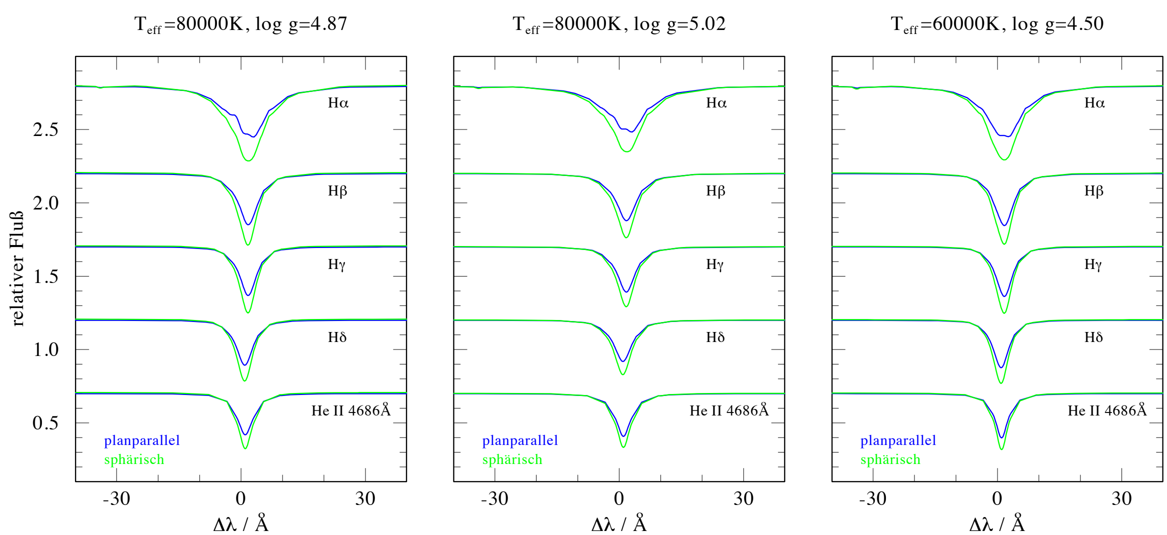

Abbildung 9.8: Vergleich der Linienprofile bei $T_{\rm eff} = 80\,000$K und $T_{\rm eff} = 60\,000$K

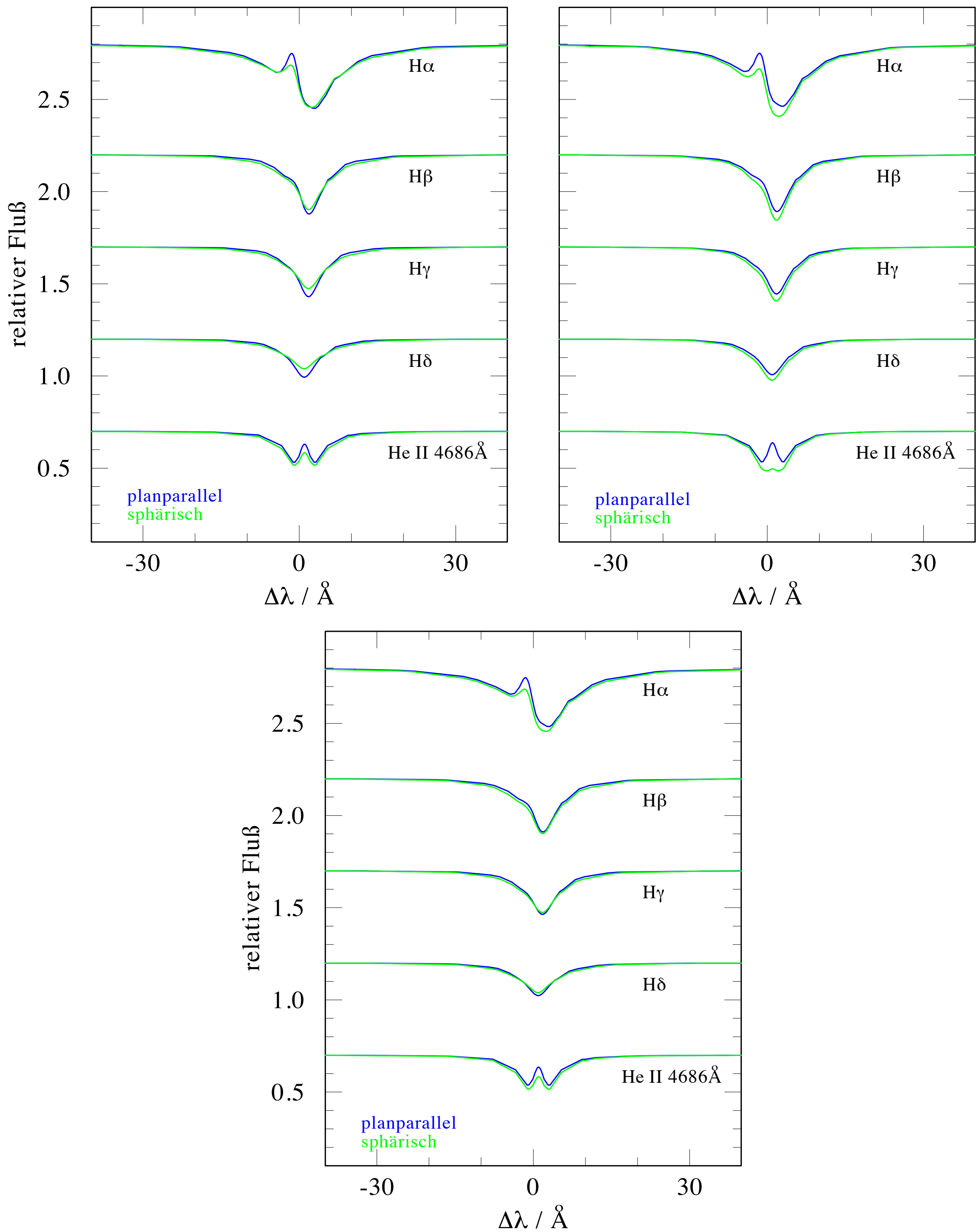

Abbildung 9.9: Vergleich eines planparallelen Modells mit einem sphärisch-symmetrischen Modell mit solaren He/H-Häufigkeiten. Oben links: planparalleles Modell mit $T_{\rm eff}$ = 140 000 K und log g = 5.76, sphärisches Modell mit $T_{\rm eff}$ = 140 000 K und log g = 6.16. Oben rechts: planparalleles Modell mit $T_{\rm eff}$ = 140 000 K und log g = 5.81, sphärisches Modell mit $T_{\rm eff}$ = 120 000 K und log g = 5.81. Unten: planparalleles Modell mit $T_{\rm eff}$ = 135 000 K und log g = 5.86, sphärisches Modell mit $T_{\rm eff}$ = 140 000 K und log g = 6.16.

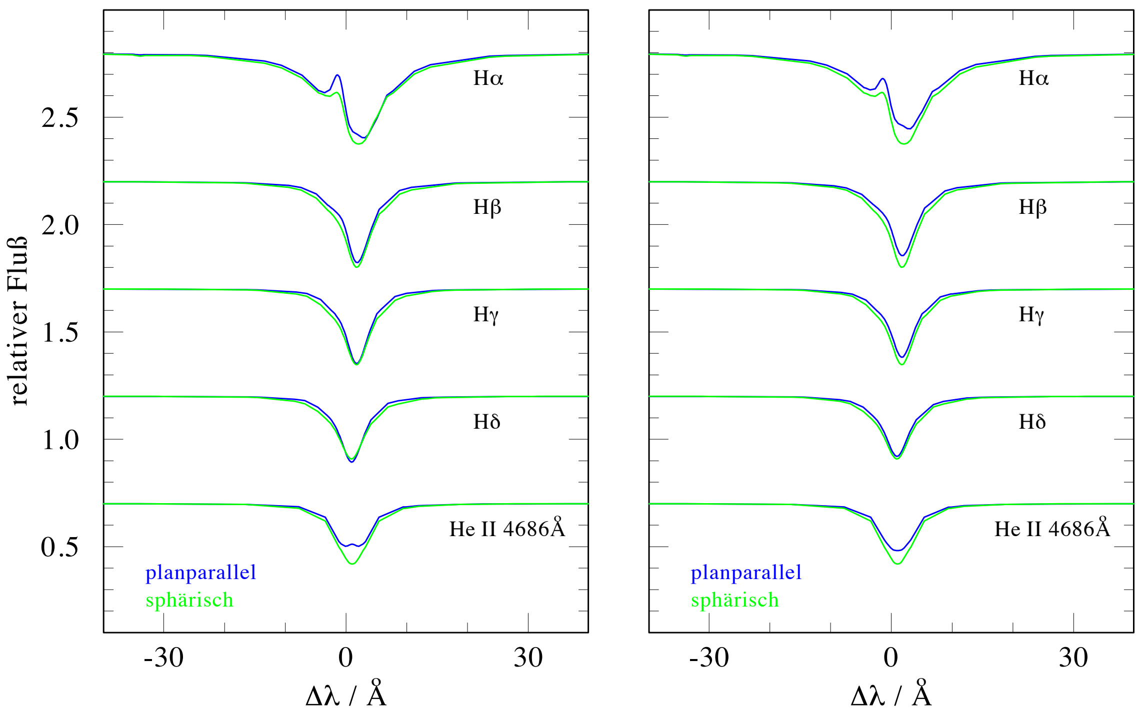

Abbildung 9.10: Vergleich eines planparallelen Modells mit einem sphärisch-symmetrischen Modell mit solaren He/H-Häufigkeiten. Links: planparalleles Modell mit $T_{\rm eff} = 105\,000$ K und $\log\,g = 5.17$, sphärisches Modell mit $T_{\rm eff} = 100\,000$ K und $\log\,g = 5.47$. Rechts: planparalleles Modell mit $T_{\rm eff} = 95\,000$ K und $\log\,g = 5.17$, sphärisches Modell mit $T_{\rm eff} = 100\,000$ K und $\log\,g = 5.47$.

9.2.3 Vergleich der Temperaturschichtung

Abbildung 9.11 zeigt die Temperaturschichtungen der berechneten Modelle. Die Unterschiede zwischen den planparallelen und sphärisch-symmetrischen Modellen sind in den Linienentstehungstiefen um log m = -1 am ausgeprägtesten. Hier liegen die Temperaturverläufe der sphärischen Modelle deutlich unter denen der planparallelen Modelle. In den inneren Tiefen sind sie dagegen deckungsgleich. In den äußeren Schichten liegen ebenfalls die sphärischen Temperaturen unterhalb den planparallel berechneten.

Die Ursache der niedrigeren Temperaturen der sphärischen Modelle liegt in der Gleichung des radiativen Gleichgewichts. Aufgrund der Ausdehnung der Sternatmosphäre kommt es zu einer Ausdünnung des Strahlungsfeldes. Dies führt dazu, daß sich das radiative Gleichgewicht bei niedrigeren Temperaturen einstellt als im planparallelen Fall.

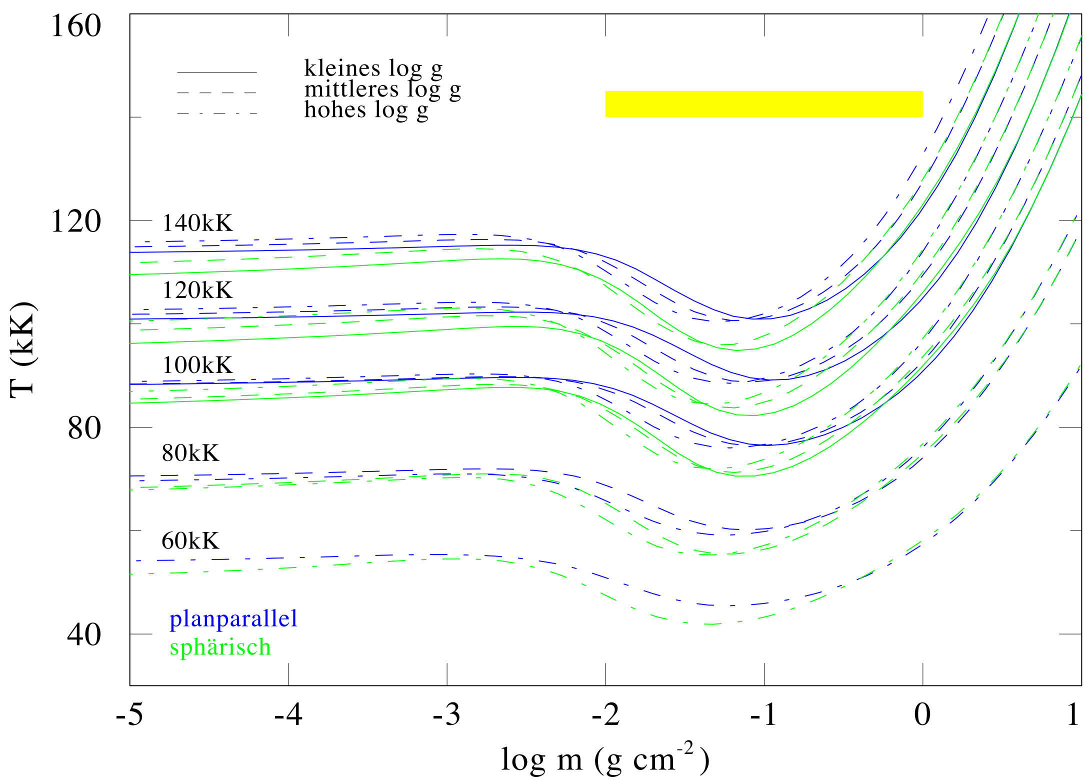

Abbildung 9.11: Vergleich der Temperaturschichtung bei Effektivtemperaturen von $T_{\rm eff}$ = 60-140 kK und unterschiedlichen Schwerebeschleunigungen (Tabelle 10.1). Der schraffierte Bereich gibt die Entstehungstiefen der Wasserstoff-Balmerlinien wieder, wobei $H\alpha$ am am weitesten außen entsteht.

9.2.4 Vergleich der Kontinuumsflüsse

In Abbildung 9.12 sind anhand zweier Beispiele die Kontinuumsflüsse der planparallelen und sphärischen Modelle einander gegenübergestellt. Hierzu wurde zum einen ein Modell mit einer Effektivtemperatur von $T_{\rm eff}$ =140 000 K und einem log g =5.76 gewählt, zum anderen ein Modell mit einer Effektivtemperatur von $T_{\rm eff}$ =100 000 K und einem log g =5.17. Letzteres Modell besitzt mit 0.074 die größte Sphärizität (siehe Tabelle 9.1), hier sollten deshalb eventuelle Effekte besonders deutlich zu sehen sein.

Es zeigt sich, daß die Kontinuumsflüsse der sphärisch-symmetrischen Modelle kleiner sind als diejenigen der planparallelen. Dieses Verhalten liegt an der Ausdehnung der sphärisch gerechneten Atmosphären. Die geometrische r^{-2}-Abhängigkeit des emergenten Flusses in sphärischer Geometrie wurde zwar berücksichtigt, nicht jedoch die Tatsache, daß aufgrund der Ausdehnung der Atmosphäre die Temperaturen in der äußeren Schicht, über die integriert wird, um den Fluß zu erhalten, nicht übereinstimmen. Würde man den Kontinuumsfluß des sphärischen Modells in der Tiefe $\tau_{Ross} = 2/3$ berechnen, so erhielte man den dem planparallelen Modell entsprechenden Fluß.

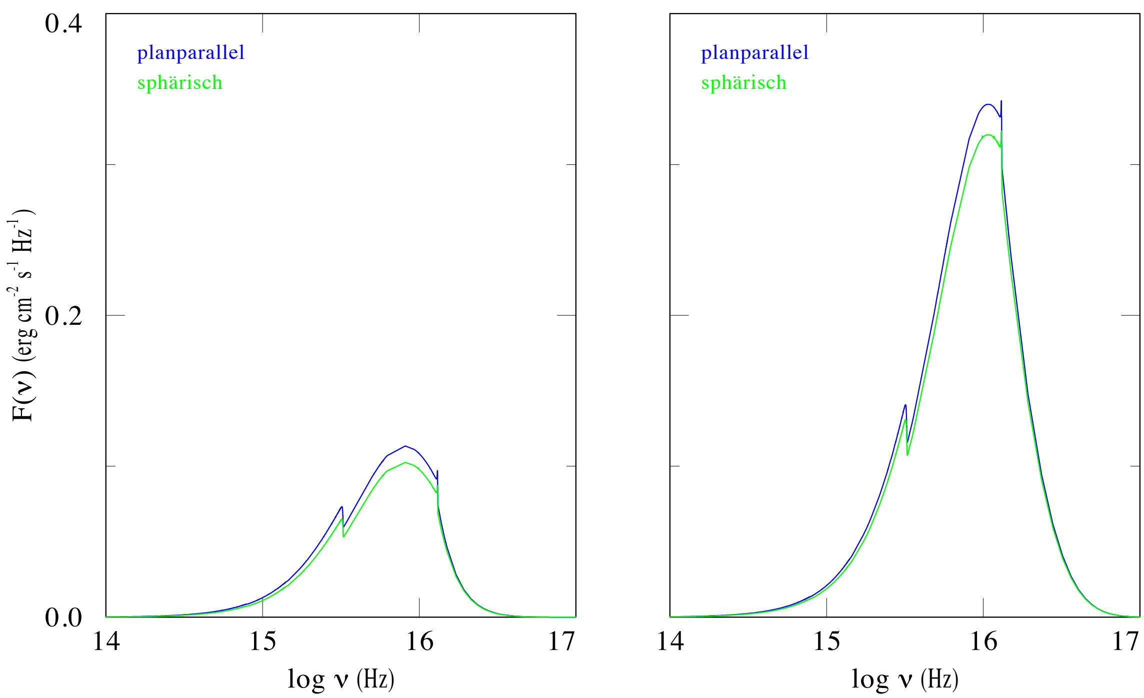

Abbildung 9.12: Vergleich der Kontinuumsflüsse zweier Modelle, jeweils planparallel und sphärisch berechnet; links: $T_{\rm eff}$ = 100 000 K, log g = 5.17, rechts: $T_{\rm eff}$ = 140 000 K, log g = 5.76. He/H ist jeweils solar.

Kapitel 10

Die Zentralsterne von K1-27 und LoTr4

10.1 Allgemeines

K1-27 und LoTr4 sind Planetarische Nebel, an deren wasserstoffarmen Zentralsternen bereits Kubat (1997) Sphärizitätseffekte studierte. Im Rahmen dieser Arbeit soll herausgefunden werden, inwieweit sich seine Ergebnisse mit unserem Programmcode bestätigen lassen. Es wurde deshalb je ein planparalleles und sphärisches HHe-Modell berechnet, wobei für CSPN K1-27 eine Effektivtemperatur von $T_{\mathrm{eff}} = 100\,000\,\mathrm{K}$, eine Schwerebeschleunigung von $\log g = 6.5$, eine stellare Masse von $\mathrm{M} = 0.52\,\mathrm{M}_{\odot}$ sowie eine Häufigkeitsverteilung von $He/H = 5$, für CSPN LoTr4 eine Effektivtemperatur von $T_{\mathrm{eff}} = 120\,000\,\mathrm{K}$, eine Schwerebeschleunigung von $\log g = 5.5$, eine stellare Masse von $\mathrm{M} = 0.65\,\mathrm{M}_{\odot}$ sowie eine Häufigkeitsverteilung von $He/H = 2$ angenommen wurde, Kubat (1997) folgend.

10.2 Ergebnisse der Modellrechnungen

Wie man in Abbildung 10.1 sieht, sind die Sphärizitätseffekte bei CSPN K1-27 nur gering. Die Linienprofile sind im sphärisch gerechneten Modell etwas tiefer eingesenkt, die Temperaturschichtung in den inneren Atmosphärenschichten zu niedrigeren Temperaturen hin verschoben.

Abbildung 10.2 zeigt Temperaturschichtung und Linienprofile von CSPN LoTr4. Man sieht deutlich, daß hier die Sphärizitätseffekte größer sind als bei CSPN K1-27. Die Linienkerne sind im sphärisch-symmetrischen Fall um etwa zehn Prozent tiefer eingesenkt als im planparallelen Modell. Auch die Temperaturschichtung zeigt eine stärkere Verschiebung zu kühleren Temperaturen hin.

In Abbildung 10.3 und Abbildung 10.4 werden die Kontinuumsflüsse der planparallelen und des sphärisch-symmetrischen Modelle miteinander verglichen. Man findet hierbei, daß die Kontinuumsflüsse der sphärischen Modelle niedriger sind als diejenigen der planparallelen Modelle, obwohl auch hier die planparallelen Flüsse mit R^2/r_1^2 skaliert sind. Wie schon bei den Linienprofilen und der Temperaturschichtung ist der Effekt bei CSPN LoTr4 deutlich, bei CSPN K1-27 dagegen und sehr gering.

Daß die auftretenden Effekte bei CSPN LoTr4 stärker sind als bei CSPN K1-27 ist aufgrund der unterschiedlichen Sphärizitäten (siehe Tabelle 9.2) nicht unerwartet. CSPN K1-27 hat eine recht geringe Sphärizität von 0.008, CSPN LoTr4 dagegen eine vergleichsweise große von 0.035, so daß dort auch die Effekte ausgeprägter sein sollten.

Ein Vergleich der hier vorgelegten Ergebnisse mit denen von Kubat zeigt, daß die Sphärizitätseffekte in unserem Fall deutlich stärker ausgeprägt sind. Die Linienprofile sind tiefer eingesenkt und das Temperaturminimum der Modellatmosphären senkt sich in unserem Fall beim Übergang von planparalleler zu sphärischer Geometrie tiefer ein. Die Ursache fuer diese unterschiedlichen Ergebnisse kann hier nicht aufgedeckt werden. Es gibt jedoch einen Hinweis darauf, daß den Kubatschen Rechnungen generell Mißtrauen entgegen gebracht werden muß. Dies zeigt sich nämlich an den monoton abfallenden Temperaturschichtungen in den äußersten Bereichen seiner planparallelen Modelle (Abbildung 1 in Kubat 1997), wohingegen unsere Modelle ein hohes Temperaturplateau bis zum äußeren Tiefenpunkt aufrechterhalten. Letzteres ist jedoch schon eine lange gesicherte Erkenntnis, die auch von anderen Autoren gefunden wurde, sodaß die Temperaturstruktur der Kubat-Modelle (und damit auch deren Linienprofile) vermutlich durch numerische Artefakte mit Fehlern behaftet sind.

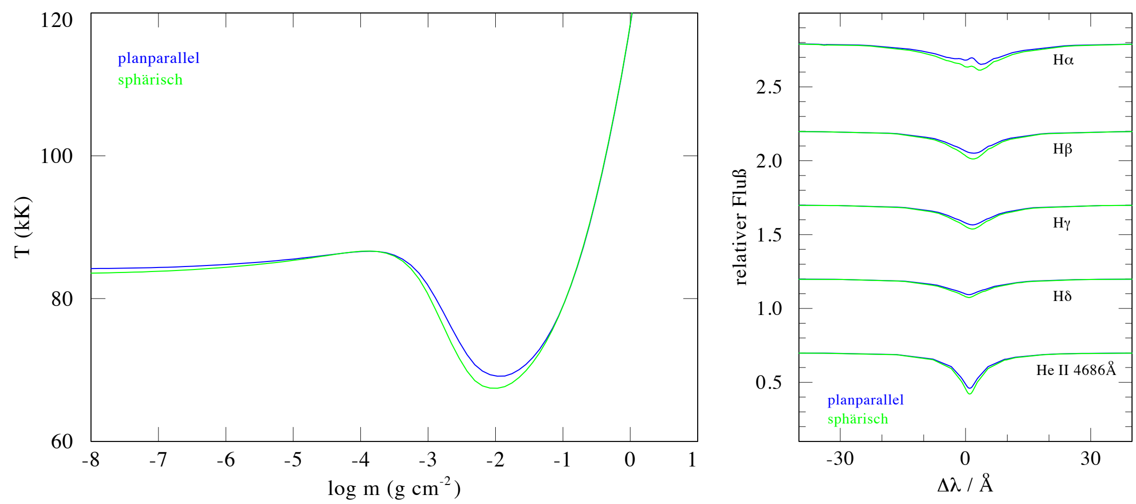

Abbildung 10.1: Vergleich von Temperaturschichtung und Linienprofilen bei CSPN K1-27, planparallel und sphärisch gerechnet mit $T_{\rm eff} = 100\,000$ K, log $g = 6.5$, M = 0.52 $M_{\odot}$, He/H = 5

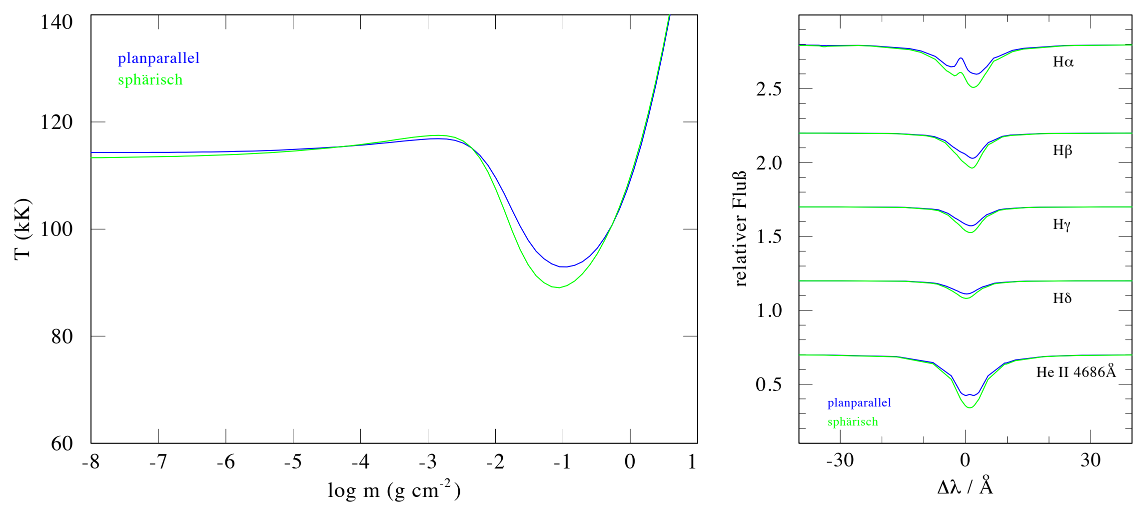

Abbildung 10.2: Vergleich von Temperaturschichtung und Linienprofilen bei CSPN LoTr4, planparallel und sphärisch gerechnet mit $T_{\rm eff} = 120\,000$ K, log $g = 5.5$, M = 0.65 $M_{\odot}$, He/H = 2

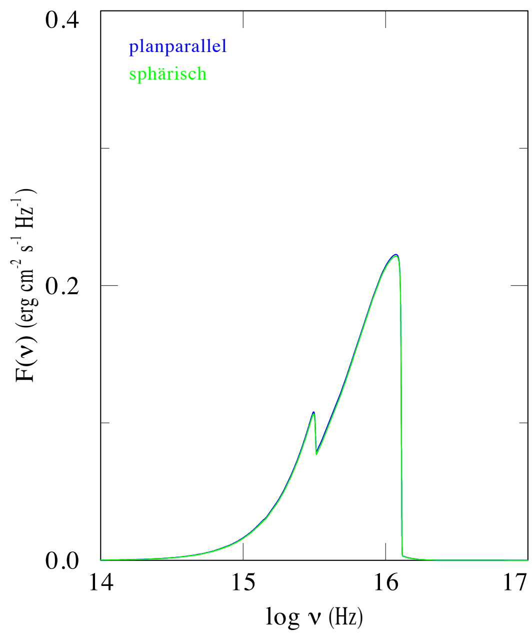

Abbildung 10.3: Vergleich des Kontinuumsflusses bei CSPN K1-27, planparallel und sphärisch gerechnet mit $T_{\mathrm{eff}} = 100\,000$ K, log $g = 6.5$, M = 0.52 $M_\odot$, He/H = 5

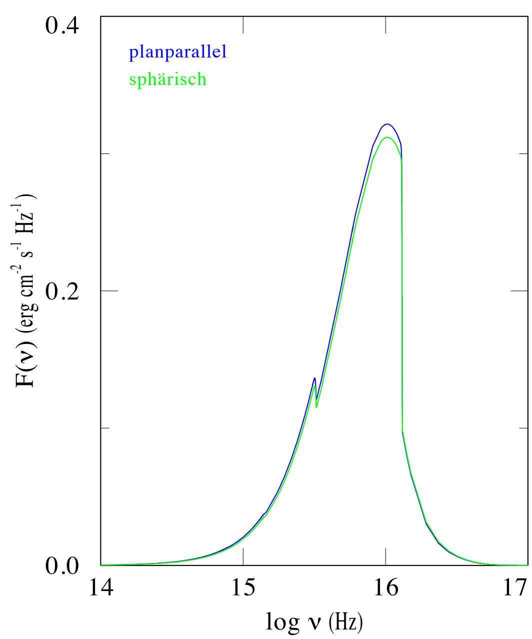

Abbildung 10.4: Vergleich des Kontinuumsflusses bei CSPN LoTr4, planparallel und sphärisch gerechnet mit $T_{\mathrm{eff}} = 120\,000$ K, log $g = 5.5$, M = 0.65 $M_\odot$, He/H = 2

Kapitel 11

Der unterleuchtkräftige O-Stern BD+28°4211

11.1 Allgemeines

BD+28°4211 ist ein heißer, wasserstoffreicher Unterzwerg (sdO) mit einer visuellen Helligkeit von etwa $10\overset{m}{.}5$, der als Standard-Stern zur Flußkalibration von UV-Satelliten (IUE, HST) verwendet wird.

Napiwotzki (1993a) bestimmte seine Effektivtemperatur anhand der Hδ-Linie zu 82 000 K und seine Oberflächenschwerebeschleunigung zu $\log g = 6.2$. Hierbei zeigte sich, daß BD+28°4211 ein ausgeprägtes Balmerlinienproblem hat. Aus der Hα-Linie erhielt Napiwotzki eine Temperatur von 45 000 K. Da BD+28°4211 als Kalibrationstern benutzt wird, stellt diese Unsicherheit in der Temperaturbestimmung ein erhebliches Problem dar. Sein spektroskopisches Erscheinungsbild ähnelt dem wasserstoffreicher Zentralsterne alter Planetarischer Nebel. Nach intensiver Suche entdeckten Zanin & Weinberger (1997) vor kurzem eine sehr große, schwache Emissionsregion mit einem Winkeldurchmesser von 5° und BD+28°4211 im Zentrum. Um entscheiden zu können, ob dies der zu BD+28°4211 gehörige Planetarische Nebel ist, sind allerdings noch mehr Beobachtungsdaten notwendig. Werner (1996) hat gezeigt, daß bei BD+28°4211 das Balmerlinienproblem gelöst werden kann, indem man in den äußeren Schichten Kühleffekte durch die Flügel Stark-verbreiteter CNO-Linien berücksichtigt.

Teil dieser Arbeit war der Versuch herauszufinden, inwieweit Sphärizitätseffekte die bisher planparallel gerechneten Modelle verändern und ob unter Umständen Sphärizitätseffekte bei der Behandlung des Balmerlinienproblems berücksichtigt werden müssen.

11.2 Ergebnisse der Modellrechnungen

Napiwotzki (1993b) folgend, wurde für die Berechnung der Modellatmosphären eine Effektivtemperatur von $T_{\rm eff} = 82\,000$ K, eine Oberflächenschwerebeschleunigung mit log $g = 6.2$ sowie eine Masse von $\mathrm{M} = 0.53\,\mathrm{M}_\odot$ gewählt. Desweitern wurde eine solare Heliumhäufigkeit und solare *CNO*-Häufigkeiten angenommen.

Betrachtet man die in Abbildung 11.1 dargestellten Linienprofile, erkennt man, daß die Linien des sphärisch-symmetrischen Modells deutlich tiefer eingesenkt sind als diejenigen des planparallelen Modells. Mit den Erkenntnissen aus Kapitel 9 läßt sich folglich auf ein im planparallelen Modell im Vergleich zum sphärischen Modell zu klein gewähltes log g schließen.

Beim Vergleich der planparallelen und sphärischen Modelle bezüglich der Temperaturschichtung (Abbildung 11.2) zeigt sich, daß sich Sphärizitätseffekte vor allem in den Entstehungstiefen der Balmerlinien bemerkbar machen, die in Abbildung 11.2 als horizontale Linien dargestellt sind. In den äußeren Schichten überwiegt die Kühlung durch *CNO*-Elemente, wie durch den Vergleich der reinen *HHe*-Modelle mit den *HHeCNO*-Modellen gut zu sehen ist. Auch erkennt man, daß durch die Zugabe von *CNO*-Elementen die Unterschiede zwischen dem planparallelen und dem sphärischen Modell kleiner werden, die Sphärizitätseffekte folglich etwas an Bedeutung verlieren.

Stellt man die Kontinuumsflüsse der planparallelen und sphärischen Modelle einander gegenüber (Abbildung 11.1), so sind diese annähernd deckungsgleich, Abweichungen aufgrund von Sphäriziäts-effekten sind so gut wie nicht festzustellen.

Insgesamt betrachtet, macht sich die Berücksichtigung der Sphärizität der Atmosphäre vor allem in den Linienprofilen, etwas in der Temperaturschichtung und so gut wie gar nicht im Kontinuumsfluß bemerkbar. Im Vergleich zu LoTr4 sind die beobachteten Effekte recht klein, was nicht überrascht, besitzt BD+28°4211 doch laut Tabelle 9.2 nur eine Sphärizität von 0.009 im Vergleich zu 0.035 bei LoTr4.

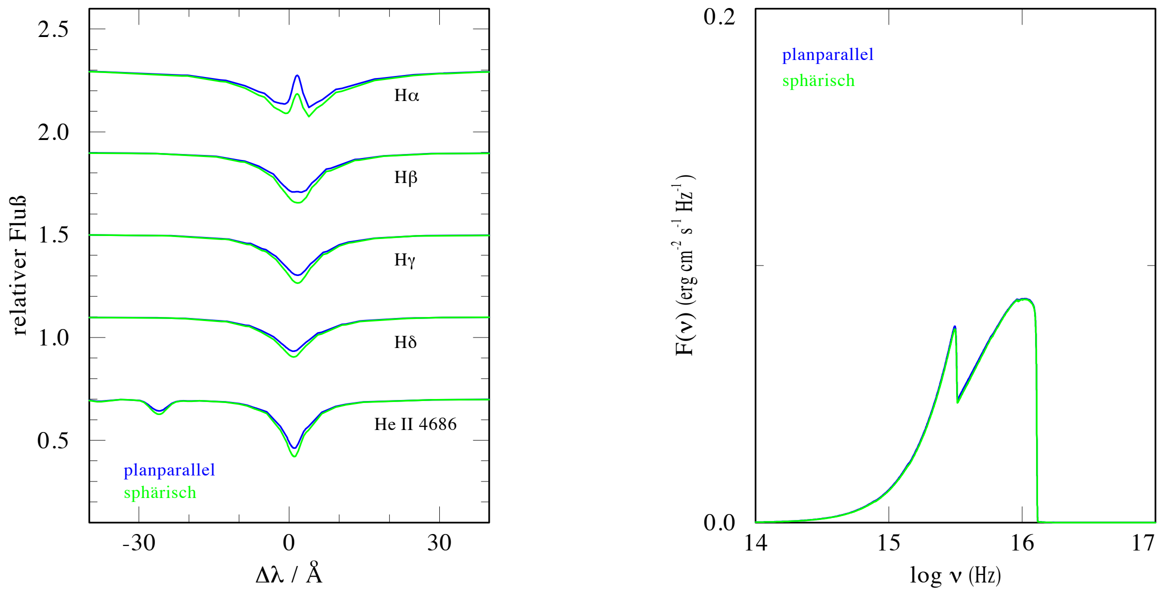

Abbildung 11.1: Links: Vergleich der Linienprofile für BD +28°4211. Rechts: Vergleich der Kontinuumsflüsse für BD +28°4211. Beides wurde für T_{eff} =82 000 K und log g =6.2, und einer HHeCNO-Atmosphäre mit solaren Elementhäufigkeiten planparallel und sphärisch gerechnet

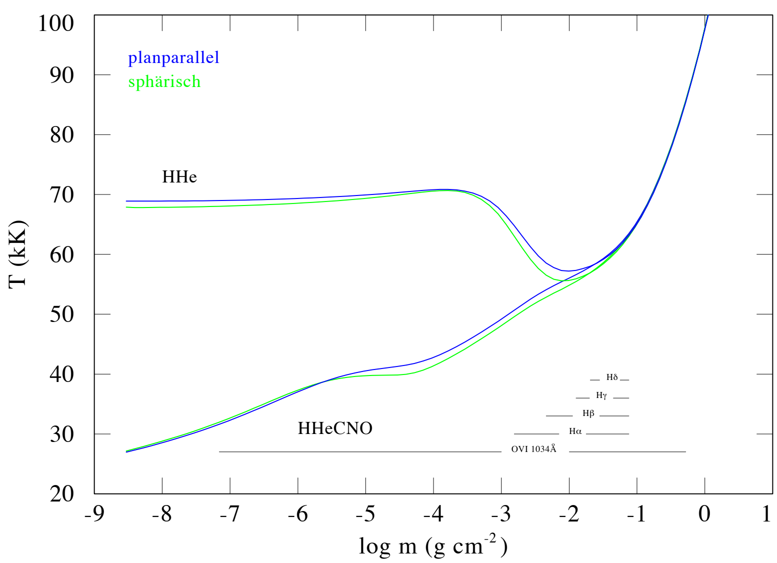

Abbildung 11.2: Vergleich der Temperaturschichtung von BD +28°4211 bei einer Effektivtemperatur von T_{eff} =82 000 K und log g =6.2, planparallel und sphärisch gerechnet, mit einer HHe-Atmosphäre und einer HHeCNO-Atmosphäre mit jeweils solaren Elementhäufigkeiten. Kühlung durch CNO-Elemente überwiegt in den äußeren Atmosphärenschichten, Sphärizitätseffekte treten vorwiegend in mittleren Tiefen auf. Zusätzlich eingezeichnet sind als horizontale Balken die Entstehungstiefen der Wasserstoff-Balmerlinien Hα bis Hδ sowie der O VI-Resonanzlinie.

Kapitel 12

Der Zentralstern von NGC 7293

12.1 Allgemeines

NGC 7293 ist ein Planetarischer Nebel, der auch unter dem Namen Helix-Nebel bekannt ist. Sein

Abbildung 12.1: Der Planetarische Nebel NGC 7293 mit seinem deutlich erkennbaren Zentralstern

Zentralstern, dessen Effektivtemperatur mit 107 000 K (Napiwotzki, 1993b) angegeben wird, gehört spektroskopisch zu den DAO-Zentralsternen. DAO-Sterne sind eine Unterklasse der DA-Sterne. Dies sind weiße Zwerge mit Wasserstoffatmosphären, der Zusatz O bei den DAOs weist auf zusätzlich nachgewiesenes Helium hin.

Auch bei CSPN NGC 7293 tritt das Balmerlinienproblem auf, im Gegensatz zu BD+28°4211 ist es aber noch nicht gelungen, es zu lösen. So ergibt sich aus der Nebelanalyse von Clegg & Walsh (1989) eine Temperatur von T_{eff} =120 000 K, Napiwotzki (1993b) bestimmte aus der $H\delta$-Linie eine Temperatur von T_{eff} =107 000 K. Beide Temperaturen sind höher als die von Napiwotzki (1993b) aus der $H\gamma$-Linie bestimmte Temperatur von T_{eff} =84 000 K. Für die Oberflächenschwerebeschleunigung erhielt Napiwotzki (1993b) einen Wert von log $g = 7.0$.

12.2 Ergebnisse der Modellrechnungen

Napiwotzki (1993b) folgend, wurde für die Modellrechnungen eine Effektivtemperatur von T_{eff} = 107 000 K sowie ein log $g = 7.0$ und eine Masse von $\mathrm{M} = 0.58\,\mathrm{M}_\odot$ gewählt. Desweitern wurde eine subsolare Heliumhäufigkeit von $He/H = 0.05$ und solare CNO-Häufigkeiten angenommen.

Vergleicht man die Linienprofile des planparallelen mit denen des sphärisch-symmetrischen Modells (Abbildung 12.2, oben), stellt man fest, daß die Balmerlinien $H\alpha$ bis $H\delta$ sowie die He II4686-Linie im sphärischen Modell tiefer eingesenkt sind, wenn auch nicht sehr stark. Vor allem bei $H\delta$ ist der Effekt kaum mehr vorhanden.

Stellt man die beiden Modelle einem beobachteten Spektrum (Napiwotzki & Schönberner, 1995) gegenüber (Abbildung 12.2, unten), ergibt sich eine deutlich bessere Übereinstimmung des sphärischen Modells mit der Beobachtung, besonders in $H\alpha$ und $H\beta$. Eine merkliche Diskrepanz besteht allerdings bezüglich der Helium-Linie, was auf einen zu hohen Heliumanteil im Modell hindeutet.

Abbildung 12.3 zeigt die unterschiedlichen Temperaturschichtungen der planparallelen und sphärisch-symmetrischen Modelle, hierbei wurden auch reine HHe-Modelle berücksichtigt, um die Kühlungseffekte der CNO-Elemente herauszustellen. Diese Kühlung tritt in erster Linie in den äußeren Schichten der Atmosphäre auf und übertrifft die Sphärizitätseffekte deutlich. In den Tiefen, in denen die Balmerlinien entstehen, sie sind in Abbildung 12.3 als horizontale Balken eingezeichnet, sind dagegen Sphärizitätseffekte zu erkennen, die im Falle der $HHeCNO$-Modelle allerdings schwächer sind als bei den reinen HHe-Modellen. Dennoch liegen die Temperaturverläufe der sphärischen Modelle erkennbar unter denen der planparallelen.

Betrachtet man die Kontinuumsflüsse der $HHeCNO$-Modelle (Abbildung 12.4), zeigt sich kaum ein Unterschied. Der Kontinuumsfluß des sphärischen Modells liegt unwesentlich unter demjenigen des planparallelen Modells.

Insgesamt läßt sich sagen, daß bei NGC 7293 die Sphärizitätseffekte, insbesondere bezüglich Temperaturschichtung und Kontinuumsfluß, nicht sehr ausgeprägt sind, was aufgrund seiner geringen Sphärizität von 0.005 (siehe Tabelle 9.2) auch nicht verwundert. Bei den Linienprofilen macht sich die Berücksichtigung der Sphärizität der Atmosphäre allerdings doch bemerkbar. Die Profile von $H\alpha$ und $H\beta$ geben die Beobachtung deutlich besser wieder, bei $H\gamma$ und $H\delta$ sind die Linienkerne aber etwas zu stark eingesenkt. Es muß an dieser Stelle jedoch noch einmal betont werden, daß dieser Profilvergleich noch mit einer verbesserten Verbreiterungstheorie durchgeführt weren muß.

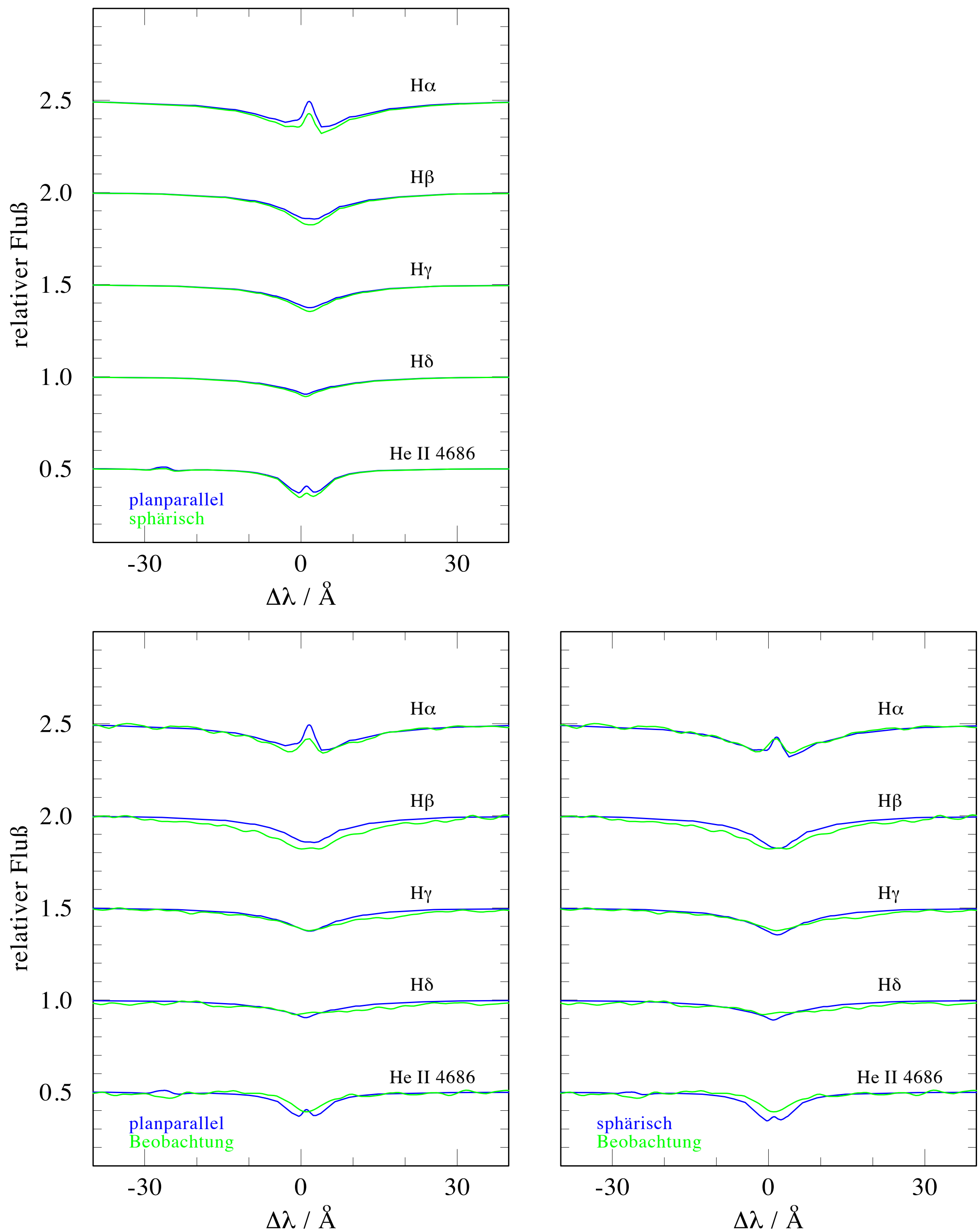

Abbildung 12.2: Vergleich des Linienprofils von $H\alpha$-$H\delta$ und He II λ4686Å bei NGC 7293. Im oberen Bild sind ein planparallel und ein sphärisch gerechnetes Modell einander gegenübergestellt. In den unteren Bildern werden die planparallel und sphärisch gerechneten Linienprofile von NGC 7293 mit einem beobachteten Spektrum (Napiwotzki & Schönberner, 1995) verglichen. Die Modelle wurden mit einer subsolaren Heliumhäufigkeit von He/H=0.05 und solaren CNO-Häufigkeiten, einer Effektivtemperatur von $T_{\rm eff} = 107\,000$ K und $\log g = 7.0$ berechnet, die gerechneten Profile sind mit einem Gaußprofil mit FWHM=2Å gefaltet, entsprechend der Auflösung des Spektrums.

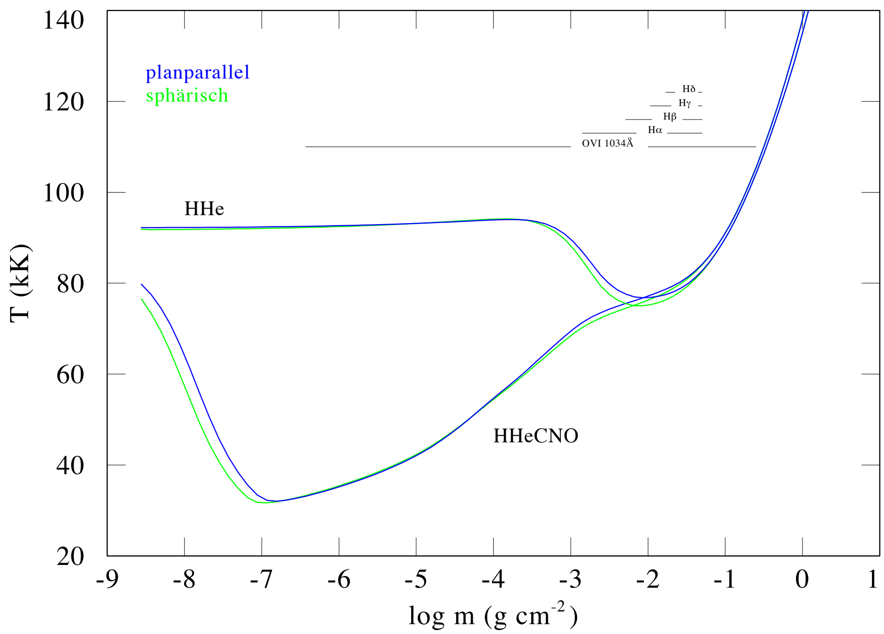

Abbildung 12.3: Vergleich der Temperaturschichtung von NGC 7293 bei einer Effektivtemperatur von T_{eff} =107 000 K und log g =7.0, planparallel und sphärisch gerechnet, mit einer HHe-Atmosphäre mit He/H = 0.05 und einer HHeCNO-Atmosphäre mit He/H = 0.05 und solaren CNO-Häufigkeiten. Als horizontale Balken eingezeichnet sind die Entstehungstiefen der Wasserstoff-Balmerlinien Hα bis Hδ sowie der O VI-Resonanzlinie.

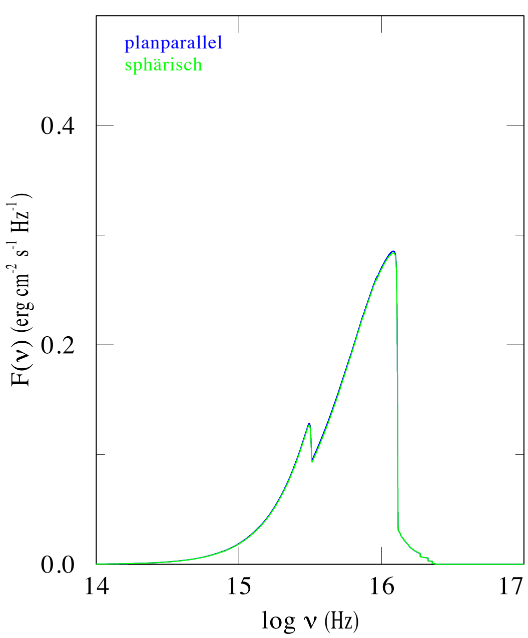

Abbildung 12.4: Vergleich der Kontinuumsflüsse von NGC 7293, planparallel und sphärisch gerechnet bei einer Effektivtemperatur von T_{eff} =107 000 K und log g =7.0, mit einer HHeCNO-Atmosphäre mit He/H = 0.05 und solaren CNO-Häufigkeiten.

Kapitel 13

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Diplomarbeit wurde der Frage nachgegangen, inwieweit Sphärizitätseffekte bei der Berechnung von NLTE-Modellatmosphären eine Rolle spielen und ob die Berücksichtigung der Sphärizität ausgedehnter Sternatmosphären das Balmerlinienproblem vermindert. Zurückblickend auf die vergangenen Kapitel ist es an der Zeit, zu versuchen eine Antwort auf diese Fragen zu geben.

Die qualitative Untersuchung des Modellgitters mit Wasserstoff-Helium-Atmosphären hat gezeigt, daß bei der Berechnung ausgedehnter Sternatmosphären mit einem Programmcode, der auf planparalleler Geometrie beruht, systematische Fehler bei der Bestimmung der Effektivtemperatur $T_{\rm eff}$ und der Schwerebeschleunigung g gemacht werden. Die Größe der Fehler konnte aus Zeitgründen nur an Einzelobjekten abgeschätzt werden, doch deutet sich an, daß vor allem $\log g$ mit den planparallelen Modellen unterschätzt wird. Hierbei ist zu beachten, daß dies wiederum Auswirkungen auf die Massenbestimmung hat. Man würde den Sternen mit planparallelen Modellen eine zu große Masse zuschreiben (bis zu 0.1 $M_{\odot}$). Der Vergleich der Modelle bei $T_{\rm eff} = 100\,000$ K hat zudem gezeigt, daß unter Umständen die mit planparallelen Modellen abgeleiteten Heliumhäufigkeiten zu gering sind. Diese Erkenntnisse betreffen insbesondere Objekte mit den ausgedehntesten Atmosphären, also Zentralsterne hoher Masse, die nahe dem Eddingtonlimit sind. Ein numerischer Test von quasi-planparallelen Modellen schließt numerische Artefakte bei der Berechnung der sphärischen Modelle aus.

Ein direkter Vergleich der hier vorgelegten Ergebnisse mit denen von Kubat (1997) zeigt, dass die Sphärizitätseffekte in unserem Fall deutlich stärker ausgeprägt sind. Die Ursache dafür muß noch aufgeklärt werden. Aus diesem Grunde stehen die hier geschilderten quantitativen Unterschiede zwischen sphärischen und planparallelen Modellen unter Vorbehalt der Aufklärung dieser Diskrepanzen.

Die Modelle für den sdO BD+28°4211 und und den Zentralstern von NGC 7293 haben gezeigt, daß in Kombination mit *CNO*-Elementen Sphärizitätseffekte keine so große Rolle mehr spielen wie bei reinen *HHe*-Atmosphären, allerdings immer noch spürbare Auswirkungen auf die Linienprofile und Temperaturschichtungen haben, so daß sie bei Sternen mit ausgedehnten Atmosphären berücksichtigt werden sollten, um ein möglichst realitätsnahes Modell mit Beobachtungen vergleichen zu können. Beim Zentralstern von NGC 7293 hat sich beispielsweise herausgestellt, daß mit Hilfe des sphärisch-symmetrischen Modells eine durchaus bessere Übereinstimmung mit dem beobachteten Spektrum erzielt werden kann als mit dem planparallelen Modell. Das Balmerlinienproblem wird zwar dadurch nicht vollständig gelöst, aber in deutlichem Maß verringert.

Für die Zukunft ist geplant, den sphärisch-symmetrischen Programmcode auf eine Vielzahl von Sternen, darunter auch PG1159-Sterne, anzuwenden, um so unter Umständen Korrekturen bezüglich ihrer Parameter $T_{\rm eff}$ und $\log g$ vornehmen zu können.

Literaturverzeichnis

Auer L., 1971, JQSRT 11, 573

Auer L., Mihalas D., 1969, ApJ 158, 641

Bronstein I., Semendjajew K., Musiol G., Mühlig H., 1995, Taschenbuch der Mathematik, Harri Deutsch, Frankfurt am Main

Cannon C., 1973, ApJ 185, 621

Clegg R., Walsh J., 1989, IAU Symp. 131, 223

Dreizler S., Werner K., 1993, A&A 278, 199

Gruschinske J., Kudritzki R., 1979, A&A 77, 341

Hubeny I., 1988, Comput. Phys. Commun. 52, 103

Hubeny I., 1991, Lecture Notes in Physics 401, 377

Hubeny I., Lanz T., 1995, ApJ 439, 875

Hummer D., Mihalas D., 1974, ApJSS 28, 343

Kubat J., 1994, A&A 287, 179

Kubat J., 1995, A&A 299, 803

Kubat J., 1996, A&A 305, 255

Kubat J., 1997, A&A 323, 524

Mihalas D., 1978, Stellar Atmospheres, W. H. Freeman, San Francisco

Napiwotzki R., 1993a, Acta Astron. 43, 343

Napiwotzki R., 1993b, Ph.D. thesis, Christian-Albrechts-Universität Kiel

Napiwotzki R., Rauch T., 1994, A&A 285, 603

Napiwotzki R., Schönberner D., 1995, A&A 301, 545

Rosseland S., 1924, Monthly Notices 84, 525

Scharmer G., 1981, ApJ 249, 720

Unsöld A., 1955, Physik der Sternatmosphären, Springer, Berlin

Vidal C., Cooper J., Smith E., 1973, ApJS 25, 37

Werner K., 1996, ApJ Letters 457, 39

Werner K., Dreizler S., 1999, Journal of Computational and Applied Mathematics 109, 65

Werner K., Heber U., Hunger K., 1991, A&A 244, 437

Werner K., Husfeld D., 1985, A&A 148, 417

Werner K., Rauch T., Dreizler S., 1999, A Users Guide to the Tübingen NLTE Model Atmosphere Package, IAAT 72076 Tübingen Germany http://astro.uni-tuebingen.de/ rauch/kmae.ps.gz

Zanin C., Weinberger R., 1997, IAU Symp. 180, 290

Teil IV

Anhang

Anhang A

Bestimmung der Sterngeometrie

Um eine ausgedehnte Sternatmosphäre zu berechnen, ist es notwendig, zuerst ihre geometrische Struktur zu bestimmen. Hierzu wird, ausgehend von einem Startmodell mit diskreten Tiefenpunkten, für die Atmosphäre eine Rosselandsche τ-Skala aufgestellt und der zu $\tau_{Ross} = \frac{2}{3}$ gehörige Tiefenpunkt bestimmt, im Normalfall durch Interpolation zwischen den beiden am nächsten liegenden Tiefenpunkten. An diesem Punkt sind die Inputparameter $\log g$ und $T_{\rm eff}$ realisiert, ansonsten sind diese Größen, wie mehrfach betont, tiefenabhängig. Nun wird die Rosselandsche Skala in eine geometrische Tiefenskala umgeformt und so die Dicke der Atmosphäre und die geometrische Lage von $\tau_{Ross} = \frac{2}{3}$ bestimmt (siehe Abbildung A.1). Da man mit den Inputparametern $\log g$ und M auch den Sternradius R bei $\tau_{Ross} = \frac{2}{3}$ kennt[1], läßt sich nun die gesamte radiale Struktur bestimmen.

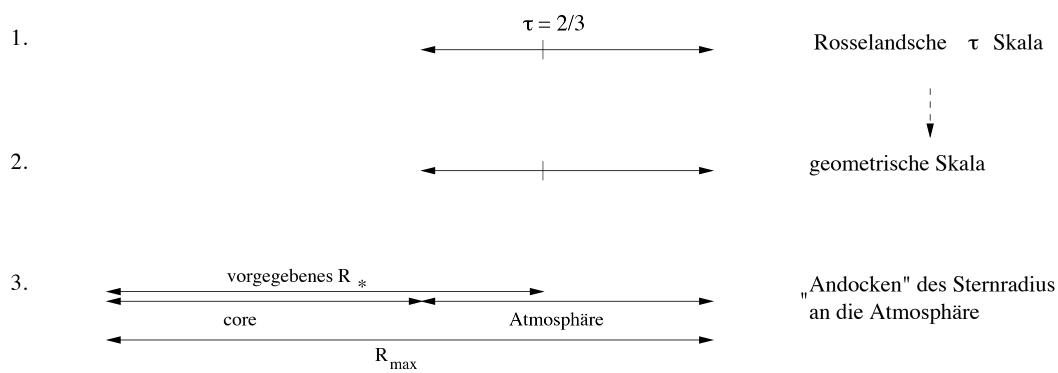

Abbildung A.1: Festlegung der Sterngeometrie in drei Schritten

Zu Beginn einer Modellrechnung ändert sich die Geometrie aufgrund der Änderung der Opazitäten oft recht deutlich, nach einigen Iterationen bleibt sie dann aber weitgehend konstant und es genügt, sie zusammen mit den Eddingtonfaktoren nach einer vorgegebenen Anzahl von Iterationen aufzufrischen.

Um einen anschaulichen Eindruck von der Ausdehnung der Atmosphären zu bekommen, wurden in Abbildung A.2 am Beispiel des 140 000 K heißen Modellgittersterns die Kernradien und maximalen Sternradien für die drei verschiedenen $\log g$-Werte gezeichnet. Aus Platzgründen wurde dabei der gesamte Stern um einen Faktor 10^9 herunterskaliert. Man sieht sehr schön, daß die Atmosphäre oftmals nur einen Bruchteil des gesamten Sternradius ausmacht. Dies hat Auswirkungen auf die Wahl der

[1] es gilt $g = G\frac{M}{R^2}$, wobei G die Gravitationskonstante ist

Anzahl der core-rays und non-core-rays. Die Zahl der non-core-rays beträgt, aus Erfahrung mit dem planparallelen Programmcode, neunzig. Um den Kernbereich nun ebenfalls sinnvoll abzudecken, ist eine mindestens ähnlich hohe Anzahl an core-rays nötig. Bei den berechneten Modellen wurden deshalb zusätzlich zu den neunzig non-core-rays jeweils hundert core-rays berechnet, um eine sinnvolle Winkelintegration entlang der Radiusschalen zu erzielen. Bei dem berechneten quasiplanparallelen Modell mit tausend Sonnenmassen ist es sogar erforderlich, die Anzahl der core-rays auf tausend zu erhöhen.

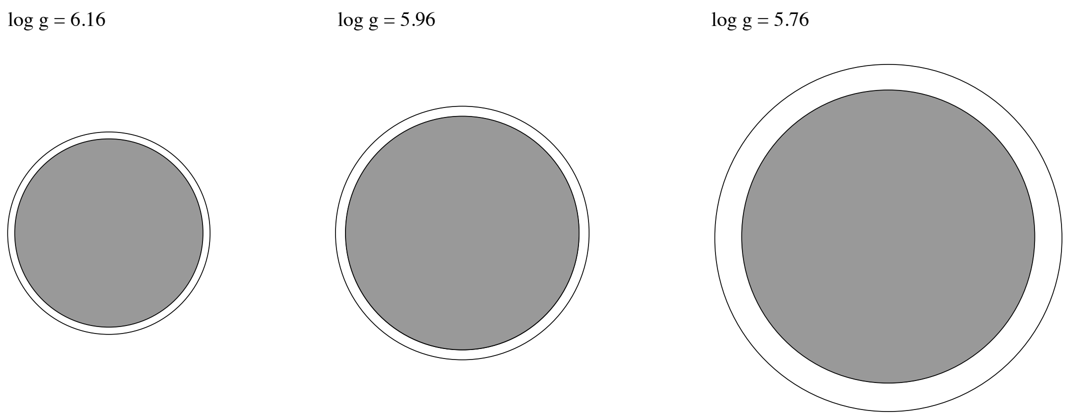

Abbildung A.2: Schematische Darstellung der Größenverhältnisse am Beispiel eines Modellsterns mit T_{eff} =140 000 K und unterschiedlichen log g-Werten. Der innere Kreis stellt den Radius des stellaren Kerns dar, der äußere Kreis den oberen Rand der Atmosphäre. Die Größenverhältnisse sind in etwa im Maßstab 1 : 10^9 wiedergegeben.

Anhang B

Diskretisierung der ray-by-ray- und Momentengleichungen

2.1 Diskretisierung der ray-by-ray-Gleichung

Nach Einführen der Feautriervariablen u und v lautet die ray-by-ray-Transportgleichung (der übersichtlicheren Schreibweise wegen werden Frequenz- und Winkelindizes hier fortgelassen)

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = u - S.$$

Diese Gleichung wird nun durch eine Differenzengleichung genähert, indem die Zwischenpunkte $\tau_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\tau_{i+1} + \tau_i)$ und $\tau_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\tau_{i-1} + \tau_i)$ eingeführt werden, so daß für die ersten Ableitungen gilt

$$\left.\frac{du(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau_{i+1/2}} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau_{i+1} - \tau_i}$$

und

$$\left.\frac{du(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau_{i-1/2}} \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}}$$

und für die zweite Ableitung an der Stelle τ_i dann folgt

$$\left.\frac{d^2u}{d\tau^2}\right|_{\tau_i} = \left.\frac{d}{d\tau}\left(\frac{du(\tau)}{d\tau}\right)\right|_{\tau_i} \approx \frac{\frac{du}{d\tau}|_{\tau_{i+1/2}} - \frac{du}{d\tau}|_{\tau_{i-1/2}}}{\tau_{i+1/2} - \tau_{i-1/2}}.$$

Setzt man nun die ersten Ableitungen ein, so erhält man bei τ_i die genäherte Differenzengleichung

$$u_i - \frac{\frac{u_{i+1}-u_i}{\tau_{i+1}-\tau_i} - \frac{u_i-u_{i-1}}{\tau_i-\tau_{i-1}}}{\frac{1}{2}(\tau_{i+1} - \tau_{i-1})} = S_i.$$

Durch geschicktes Zusammenfassen der Terme ergibt sich dann eine Differenzengleichung der Form

$$-A_i u_{i-1} + B_i u_i - C_i u_{i+1} = S_i$$

wobei

$$\begin{aligned} A_i &= \left(\frac{1}{2}(\tau_i-\tau_{i-1})(\tau_{i+1}-\tau_{i-1})\right)^{-1} \\ B_i &= 1+A_i+C_i \\ C_i &= \left(\frac{1}{2}(\tau_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-\tau_{i-1})\right)^{-1} \end{aligned}$$

und $i=2,...,N-1$.

Um eine äußere beziehungsweise innere Randbedingung zweiter Ordung zu erhalten, wird eine Taylorentwicklung von $u(\tau)$ um τ_i beziehungsweise um τ_N durchgeführt.
Für die äußere Randbedingung ergibt sich dann

$$u_2 \approx u_1 + (\tau_2-\tau_1)\left.\frac{du}{d\tau}\right|_{\tau_1} + \frac{1}{2}(\tau_2-\tau_1)^2\left.\frac{d^2u}{d\tau^2}\right|_{\tau_1}.$$

Hierbei ergibt sich $\frac{du}{d\tau}$ aus der Randbedingung erster Ordnung, $\frac{du}{d\tau}=u_1$, und $\frac{d^2u}{d\tau^2}$ aus der Differentialgleichung $\frac{d^2u}{d\tau^2}=u_1-S_1$.
Dies läßt sich nun schreiben als

$$B_1u_1-C_1u_2=S_1$$

wobei für die Koeffizienten gilt

$$\begin{aligned} B_1 &= 1+2(\tau_2-\tau_1)^{-1}+2(\tau_2-\tau_1)^{-2} \\ C_1 &= 2(\tau_2-\tau_1)^{-2}. \end{aligned}$$

Bei der Bestimmung der inneren Randbedingung muß zwischen core-rays und non-core-rays unterschieden werden. Ansonsten ist das Vorgehen identisch und es ergibt sich

$$-A_Nu_{N-1}+B_Nu_N=S_N^*,$$

wobei für core-rays gilt

$$\begin{aligned} A_N &= 2(\tau_N-\tau_{N-1})^{-2} \\ B_N &= 1+2(\tau_N-\tau_{N-1})^{-1}+2(\tau_N-\tau_{N-1})^{-2} \\ S_N^* &= S_N+2(\tau_N-\tau_{N-1})I^+ \end{aligned}$$

und für non-core-rays

$$\begin{aligned} A_N &= 2(\tau_N-\tau_{N-1})^{-2} \\ B_N &= 1+2(\tau_N-\tau_{N-1})^{-2} \\ S_N^* &= S_N. \end{aligned}$$

2.2 Diskretisierung der Momentengleichung

Ausgehend von den nullten und ersten Momentengleichungen läßt sich die kombinierte Momentengleichung bestimmen:

$$-\frac{d}{dr}(\frac{1}{q_\nu \kappa_\nu^1}\frac{d}{dr}(q_\nu f_\nu \tilde{J}_\nu)) = \kappa_\nu^0(\tilde{S}_\nu - \tilde{J}_\nu)$$

Um sie zu diskretisieren, nähert man sie, analog zur ray-by-ray-Gleichung, durch eine Differenzengleichung zu den Zwischenpunkten $r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(r_{i+1}+r_i)$ und $r_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(r_{i-1}+r_i)$. Man erhält dann eine Gleichung der Form

$$-A_i\tilde{J}_{i-1} + B_i\tilde{J}_i - C_i\tilde{J}_{i+1} = \kappa_i^0\tilde{S}_i,$$

wobei

$$\begin{aligned}
A_i &= \frac{q_{i-1}f_{i-1}}{term_1} \\
C_i &= \frac{q_{i+1}f_{i+1}}{term_2} \\
B_i &= \kappa_i^0 + \frac{q_i f_i}{term_1} + \frac{q_i f_i}{term_2}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
term_1 &= \frac{1}{8}(\kappa_i + \kappa_{i-1})(q_i + q_{i-1})(r_{i-1} - r_i)(r_{i-1} - r_{i+1}) \\
term_2 &= \frac{1}{8}(\kappa_i + \kappa_{i+1})(q_i + q_{i+1})(r_i - r_{i+1})(r_{i-1} - r_{i+1}).
\end{aligned}$$

Randbedingungen zweiter Ordnung erhält man durch Taylorentwicklung von $qf\tilde{J}$ um r_1 und r_N.
Für die äußere Randbedingung ergibt sich dann in diskretisierter Form

$$B_1\tilde{J}_1 - C_1\tilde{J}_2 = W_1,$$

wobei für die Koeffizienten gilt

$$\begin{aligned}
B_1 &= \kappa_1^0 + \frac{2q_1 h_1 \kappa_1^1}{term_1} + \frac{2q_1^2 f_1 \kappa_1^1}{term_1 * term_1} \\
C_1 &= \frac{2q_1 q_2 f_2 \kappa_1^1}{term_1 * term_1} \\
W_1 &= \kappa_1^0\tilde{S}_1
\end{aligned}$$

mit

$$term_1 = \frac{1}{4}(q_1 + 1_2)(\kappa_1^1 + \kappa_2^1)(r_1 - r_2).$$

κ^0 ist wieder die Opazität ohne Thomsonstreuanteil, κ^1 ist die Opazität mit Thomsonstreuanteil.

Für die innere Randbedingung ergibt sich dann

$$-A_N\tilde{J}_{N-1} + B_N\tilde{J}_N = W_N$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
A_N &= \frac{2q_N q_{N-q} f_{N-q\kappa_N^1}}{term_2 * term_2} \\
B_N &= \kappa_N^0 - \frac{2q_N h_N \kappa_N^1}{term_2} + \frac{2q_N^2 f_N \kappa_N^1}{term_2 * term_2} \\
W_N &= \kappa_N^0 \tilde{S}_N - \frac{2q_N \kappa_N^1 \tilde{H}^+}{term_2}
\end{aligned}$$

und

$$term_2 = \frac{1}{4}(q_N + q_{N-1})(\kappa_N + \kappa_{N-1})(r_N - r_{N-1}).$$

Anhang C

Neue Steuerkarten für das Modellatmosphärenprogramm PRO2

SPHERICAL
Umschalten von planparalleler auf sphärische Geometrie

STARMASS=X
Angabe der Sternmasse X in Einheiten der Sonnenmasse

REFRESH EDDIES AND GEOMETRY I
Angabe, wie häufig Geometrie und Eddingtonfaktoren neu berechnet werden, wobei I jede I te ALI-Iteration bedeutet

ITERATIONS OF FORMAL SOLUTION
Angabe, wie oft die formale Lösung durchlaufen werden soll, bevor die statistischen Gleichungen gelöst werden

RELAXED TEMP-CORRECTION I J
Schalter, um die Temperaturkorrektur ab der J. Iteration nur noch jede I. Iteration durchzuführen

KNOWN RADIATIONFIELD
Bekanntes Strahlungsfeld aus file RADFIELD einlesen

KNOWN EDDIES
Bekannte Eddingtonfaktoren aus file EDDIES einlesen

KNOWN GEOMETRY
Bekanntes R_{max} aus file GEOMETRY einlesen

CONSTANT GEOMETRY I
Schalter, um von der I. Iteration an die Geometrie fest zu halten

Eine Einführung in die Benutzung des Programms PRO2 wird in Werner et al. (1999) gegeben.

Danksagung

Dank geht zuerst einmal an K.Werner für die Themenstellung der Diplomarbeit und seine unermüdliche Unterstützung während der letzten 12 Monate.

Ebensolcher Dank geht an S. Dreizler und T. Rauch, die mit unglaublicher Ausdauer meine Fragen beantworteten und mich in die Tiefen des Programms PRO2 einwiesen, sowie an den Rest der Arbeitsgruppe für die Hilfe in allen Lebenslagen.

Ein dickes Dankeschön geht auch an das gesamte Astronomische Institut Tübingen, speziell natürlich an die 10^{00} Uhr Teerunde, für die tolle Atmosphäre, die mit ein Grund ist, daß ich dem Institut noch eine Weile erhalten bleibe.

Außerdem geht an Dank an Wolf-Rainer Hamann und insbesondere Lars Koesterke von der Professur Astrophysik der Universität Potsdam für manch fruchtbare Diskussion.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Eltern sowie meiner Oma, die mir durch ihre finanzielle Unterstützung das Studium überhaupt ermöglicht haben.

„Truth suffers from too much analysis.“

Ancient Fremen Saying, Dune Messiah